Matematická analýza 1

Písemná část zkoušky
17. 1. 2023

Jméno a příjmení: .....

1	2	3	4	5	Σ

Pokyny k vypracování:

Na pokyn zadávajícího otočte tento list a vypracujte úlohy na druhé straně.

Pište čitelně a nepoužívejte červenou barvu ani obyčejnou tužku. Ponechejte dostatek místa v levém horním rohu každého listu. Listy zde budou sešity.

Za každou z úloh 1–4 lze získat 10 bodů. V každé z těchto úloh své řešení náležitě zdůvodněte a zřetelně označte výsledek. Pokud jste úlohu vyřešili více postupy, vyberte jeden a ten odevzdejte.

Pro každé z pěti tvrzení v úloze 5 rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Uvádějte pouze odpověď „ano/ne“. Zdůvodnění zde není vyžadováno a nebude zde hodnoceno. Za každou správnou odpověď získáváte 2 body, za špatnou -2 body a za vynechanou 0 bodů. Je-li součet bodů získaných v této úloze záporný, do celkového hodnocení zkoušky se započítává 0 bodů.

Čas na vypracování písemné zkoušky je 100 minut.

Nejsou povoleny jiné pomůcky než psací potřeby. Porušení tohoto pravidla a jakákoli jiná podvodná jednání budou hodnocena známkou F.

15 minut před koncem zkoušky není možné opustit místnost. Budete-li s prací hotovi v průběhu posledních 15 minut, zůstaňte sedět na místě do konce zkoušky.

Informace o vyhlášení výsledků a začátku ústní zkoušky vám poskytne zadávající.

Úloha 1. Určete následující limitu nebo zdůvodněte, proč neexistuje.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x + \sin(2x+1)}{\cosh(x+1) + x^2 + 1}.$$

Úloha 2. Určete Taylorovy polynomy řádů 1 a 2 o středu 3 funkce dané předpisem

$$f(x) \coloneqq (2x-5)^x.$$

Úloha 3. Spočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{6}{e^{2x} + 4e^x + 3}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}}{n}.$$

Úloha 5. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení.

1) Má-li posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vlastní limitu a posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená, potom má posloupnost $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vlastní limitu.

2) Každá funkce, která je spojitá na uzavřeném a omezeném reálném intervalu (v krajních bodech jednostranně), nabývá na tomto intervalu svého minima.

3) Je-li funkce f nerostoucí a záporná na intervalu $[2,3]$, potom Riemannův integrál $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a rovná se zápornému reálnému číslu.

4) Je-li funkce f diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a splňuje-li $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, potom platí také $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

5) Je-li $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost kladných čísel splňující $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.