Matematická analýza 1

Písemná část zkoušky
24. 1. 2023

Jméno a příjmení: .....

1	2	3	4	5	Σ

Pokyny k vypracování:

Na pokyn zadávajícího otočte tento list a vypracujte úlohy na druhé straně.

Pište čitelně a nepoužívejte červenou barvu ani obyčejnou tužku. Ponechejte dostatek místa v levém horním rohu každého listu. Listy zde budou sešity.

Za každou z úloh 1–4 lze získat 10 bodů. V každé z těchto úloh své řešení náležitě zdůvodněte a zřetelně označte výsledek. Pokud jste úlohu vyřešili více postupy, vyberte jeden a ten odevzdejte.

Pro každé z pěti tvrzení v úloze 5 rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Uvádějte pouze odpověď „ano/ne“. Zdůvodnění zde není vyžadováno a nebude zde hodnoceno. Za každou správnou odpověď získáváte 2 body, za špatnou -2 body a za vynechanou 0 bodů. Je-li součet bodů získaných v této úloze záporný, do celkového hodnocení zkoušky se započítává 0 bodů.

Čas na vypracování písemné zkoušky je 100 minut. Minimální bodový zisk pro postup k ústní zkoušce je 25 bodů.

Nejsou povoleny jiné pomůcky než psací potřeby. Porušení tohoto pravidla a jakákoli jiná podvodná jednání budou hodnocena známkou F.

15 minut před koncem zkoušky není možné opustit místnost. Budete-li s prací hotovi v průběhu posledních 15 minut, zůstaňte sedět na místě do konce zkoušky.

Informace o vyhlášení výsledků a začátku ústní zkoušky vám poskytne zadávající.

Úloha 1. Určete následující limitu nebo zdůvodněte, proč neexistuje.

$$\lim_{x\to\infty}(3^x-1)^{\sin\frac{1}{x}}.$$

Úloha 2. Určete všechny maximální intervaly monotonie a všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) \coloneqq \operatorname{arctg}(|x+2|x)$$

na jejím definičním oboru. Zdůvodněte, zda některé z nalezených extrémů jsou i globální (tedy jsou extrémy dané funkce na celém jejím definičním oboru).

Úloha 3. Spočítejte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos^3 x\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 4. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^2+n+1}{5n^3+4n^2+3}\right).$$

Úloha 5. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení.

1) Jsou-li $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dvě konvergentní posloupnosti splňující $a_n < b_n$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$, pak platí
$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) Je-li funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a omezená na každém intervalu $[a,b]$, kde $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$, pak je tato funkce omezená na $\mathbb{R}$.

3) Je-li funkce f kladná a spojitá na $\mathbb{R}$, pak na $\mathbb{R}$ existuje její primitivní funkce, která je rostoucí.

4) Pro každou funkci f diferencovatelnou na $\mathbb{R}$ a každé $x,y\in\mathbb{R}$ platí
$$f'(x+y) = f'(x)+f'(y).$$

5) Je-li $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost kladných čísel taková, že existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} n^2a_n$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.