kategorie I

(i) Limity

(a) zkusit dosadit $x=0$, $y=kx$, popř případě polárními souř. pokud vyjdou 2 různé výsledky nebo je limita závislá na k, limita neexistuje

(ii) Tečná rovina na plochu v bodě

(a) spočítám gradient plochy ($\nabla F(x,y,z)$), spočítám gradient v bodě $\rightarrow \vec{n}$ roviny. Dopočítám parametr d. ($ax+by+cz+d=0$)

(b) Tečná rovina a rovnoběžná s rovinou σ

hledám gradient σ, gradient tečné

$\nabla f(x,y,z) = \alpha \nabla g(x,y,z)$

(iii) Extrémy

(a) Nalezete lokální extrémy funkce f

Nutná podmínka existence extrémů: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

Nalezeny stacionární (kritické body).

Pro vyšetření minima/maxima/sedlového bodu spočítám druhou derivaci (Hessián).

Sylvestrovo kritérium (pozitivní / negativní / indefinitní)

(b) Nalezněte lok. extrémy fce f na množině M. (g)

Rozdělím ∂M a M°.

Na ∂M použiji Lagrangeho multiplikátory:

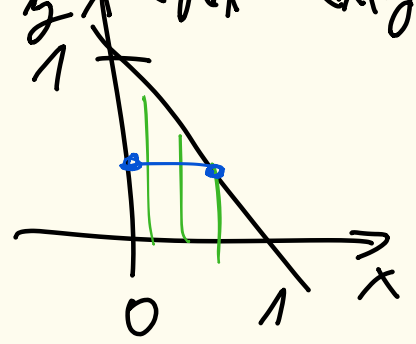
$h(x,y) = f - \lambda g$ ← ∂M derivuji podle x, y, λ, položím rovno nule.

Nalezu body podezřelé z extrému.
Spočtu funkční hodnoty v nich ⇒ min / max.
Na M^0 postupuje jako v (a)

→ věta o existenci extrému (∃M je omezená uzavřená množina)

kategorie II

(i) Původní plocha integrace
Nakreslím si obrázek, vyznačím jednu mez, druhá se dopočítá z meze kterou jsem zafixoval.



Popřípadě rozdělení na více množin.
$M = M_1 \cup M_2$.

U: $0 \le x \le -y+1$
$0 \le y \le 1$

(ii) Převod na polární souřadnice.
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
Zjistím φ z obrázku.
$y = 1-x$
$r\sin\varphi - r\cos\varphi = 1$

U: $0 \le \varphi \le \pi/2$
$0 \le r \le \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$

Zjistím dolní a horní hranici r ze vztahů v kartézských souřadnicích.
Zapíšu $\iint_U f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot |\text{jakobián}(r)|\, dr\, d\varphi$.

kategorie III

(i) Délka křivky

Zparametrizovat křivku jako $\varphi(t) = ?$

$a \; t \in [a, b]$

Potom délka křivky

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b 1 \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt$$

(ii) Hmotnost drátu s hustotou σ

Zparametrizuji C jako $\varphi(t) = ?$

$a \; t \in [a, b]$

Potom hmotnost drátu

$$\int_a^b \sigma(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt$$

Př. $\sigma(x,y,z) = x^2 + y^2$

$\varphi(t) = (\sin t, \cos t, 0)$

$$\int_a^b (\sin^2 t + \cos^2 t) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt$$

(iii) Práce vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky C.

Zparametrizuji C jako $\varphi(t)$

Potom práce: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$

(iv) Greenova věta – práce vektorového pole

(ad1) Najděte $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $\quad F =$ a C je křivka

Zparametrizuji

Potom $\int_C \vec{F} \cdot ds = \iint_M \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dS$

mluvo zjistit meze a pomocí integrace (tvrdá podmínka souvislosti)

(ad 2) Obsah Greenova vztah

$$\iint_M 1 \, dA = \iint_M \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y}}_{\alpha} \, dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

kde F zvolíme tak, aby $\alpha = 1$

např $\vec{F}(0, x)$

Zparametrizujeme křivku a postupně

$$\int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

(v) Gaussova věta

Nalezněte tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou M, která je hranicí množiny.

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div} F \, dV$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Vhodně zvolit může např. cylindrické souř.

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \\ \det(J_\Phi) = r \end{pmatrix}$$

(vi) Stokesova věta (křivkový integrál 2. druhu podél křivky C)

$$\int_C F\,ds = \iint_M \operatorname{rot} F\,dA$$

param. $\varphi(u,v)$

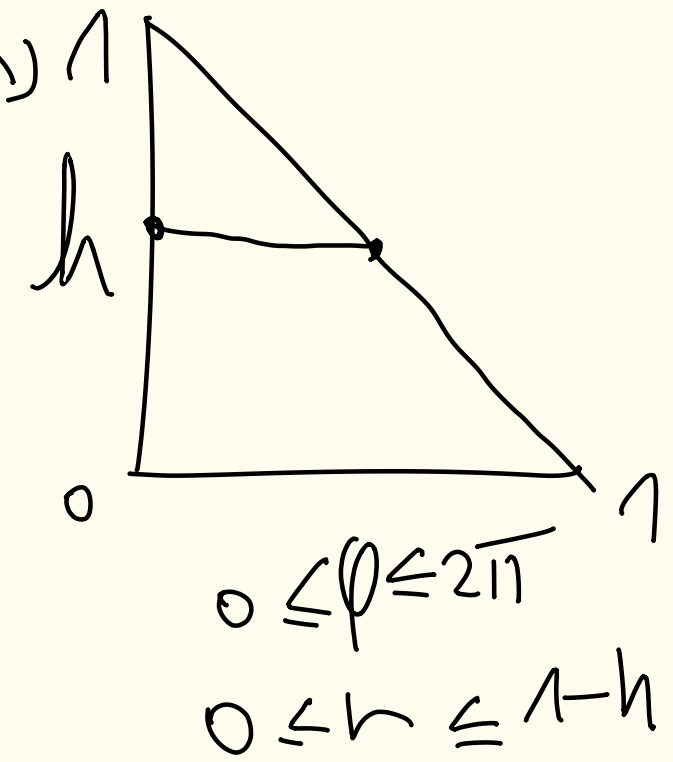
vynásobit $\partial_u \times \partial_v$ normálovým vektorovým polem

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

(ad 2) vypočteme $\iint_M \operatorname{rot} F\,dA$

$$\iint_M \operatorname{rot} F\,dA = \int_C F\,ds = \int_a^b F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

(vii) Vypočtěte objem tělesa (tvar hvězd) nakreslit obrázek



$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le r \le 1-h$

$0 \le h \le 1$

Potom $\iiint_T 1 \, dV$

(viii) vypočtěte hmotnost tělesa s plošnou hustotou σ.

$$\iiint_T \sigma \, dV = m$$

(viv) Zjistěte zda je pole konzervativní a nalezněte jeho potenciál.

$$\mathrm{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \text{musí být } 0, \text{ aby pole mohlo být konz.}$$

Potom:

$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ Řešíme soustavu parciálních diferenciálních rovnic.

$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ Pokud má potenciál, je konzervativní.

$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$ Pokud je konzervativní, práce nezávisí na křivce, práce z A do B je $f(B) - f(A)$