

MA 1-20

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$, která je rovnoběžná se souřadnou rovinou xz .
2. Na elipse $x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$ nalezněte bod s největší x -ovou souřadnicí.
3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^x f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varphi \, d\varrho$.

4. Hmotná koule s poloměrem R a středem v počátku má hustotu v bodě (x, y, z) rovnou polovině vzdálenosti bodu (x, y, z) od počátku. Zjistěte moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející počátkem.
5. Určete, zda je některé z polí $\vec{F} = (y, z, xyz)$ a $\vec{G} = (yz, xz, xy + 2z)$ potenciální a zjistěte jejich potenciál.

Řešení.

1. Vektor $\text{grad}(x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy) = (2x - 2y, 6y - 2x, 8z)$ musí být rovnoběžný s vektorem $(0, 1, 0)$. To nastane v bodech $\pm(\sqrt{8}, \sqrt{8}, 0)$. Máme tak dvě tečné roviny $y = \pm\sqrt{8}$.
2. Maximalizujeme funkci $f(x, y, z) = x$ na dané elipse. Lagrangeova funkce je $L = x - \lambda(x^2 + 6y^2 + 3xy - 40)$. Její stacionární body jsou $\pm(8, -2)$, a tedy největší x -ovou souřadnici má bod $(8, -2)$.

3. Opačné pořadí je $\int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f \, dx \, dy + \int_0^1 \int_y^1 f \, dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \int_0^{2\cos\varphi} f \varrho \, d\varrho \, d\varphi + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} f \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

4. Moment setrvačnosti je $I = \iiint \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ve sférických souřadnicích dostaneme $\int_0^\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho^5 \sin^3 \theta \, d\varphi \, d\varrho \, d\theta = \frac{2\pi R^6}{9}$.
5. Vektor $\text{rot } \vec{F} = (xz - 1, -yz, -1)$ je nenulový, a proto \vec{F} není potenciální; $\text{rot } \vec{G} = 0$, zde už může jít o potenciální pole. Výpočtem zjistíme, že potenciál je $g = xyz + z^2 + C$.