MA 2-20

1. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $x^2 - 2x + 6y - z^2 = 2$, která je rovnoběžná s rovinou $x + 3y + 4z = 0$.

2. Jakou výšku má nejvyšší bod na ploše $z = (x+1)^2 + y^2$ uvažované nad elipsou $4x^2 + y^2 = 1$?

3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2-y^2}}^{2-y} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Pomocí Greenovy věty určete práci vykonanou polem $\vec{F} = (-xy^2, x^2 y)$ podél kladně orientované hranice množiny

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ x, y \geq 0\}.$$

5. Zjistěte, je-li pole $\vec{F} = (e^x \sin y, e^x \cos y + \lambda x^2)$ potenciální pro nějakou hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$ a v kladném případě najděte jeho potenciál.

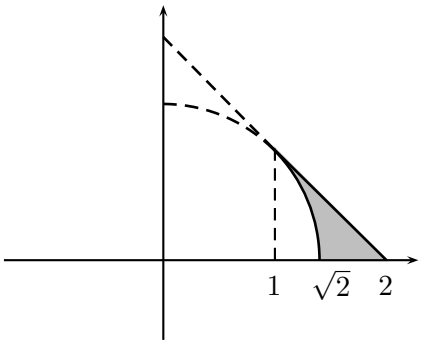
Řešení.

1. Vektor $\operatorname{grad}(x^2 - 2x + 6y - z^2 - 2) = (2x - 2, 6, 2z)$ musí být rovnoběžný s vektorem $(1, 3, 4)$. To nastane v bodě $(2, 3, -4)$. Tečná rovina k dané ploše je $x + 3y + 4z + 5 = 0$.

2. Maximalizujeme hodnotu $f(x, y) = (x+1)^2 + y^2$ na dané elipse. Lagrangeova funkce je $L = (x + 1)^2 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$. Její stacionární body jsou $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ a $(\frac{1}{3}, \pm\sqrt{5}/3)$. Největší hodnotu má funkce v bodech $(\frac{1}{3}, \pm\sqrt{5}/3)$ a to $7/3$.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-x^2}}^{2-x} f \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{2-x} f \, dy \, dx$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}} f \, \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



4. $A = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \iint_D 4xy$. V polárních souřadnicích dostaneme: $A = 4\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \varrho^3 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi d\varrho = \frac{15}{2}$.

5. Nutná podmínka $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ je splněna pro $\lambda = 0$. Výpočtem zjistíme, že $f = e^x \sin y + C$ je potenciál.