MA 3-20

1. Zjistěte, pod jakým úhlem se protínají plochy $x^2+y^2=2$ a $xy=z\sqrt{6}$ v bodě $A=(1,1,1/\sqrt{6})$.

2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $z=4x-3x^3-2xy^2$.

3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx\,dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho\,d\varphi$.

4. Najděte těžiště kužele $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\}$, je-li hustota v bodě (x,y,z) rovna jeho vzdálenosti od roviny xy.

5. Nalezněte potenciál pole $\vec{F}=(y+yz, x+xz+3z^3, xy+9yz^2-1)$ a pomocí něj vypočtěte práci, která se vykoná při pohybu po spirále začínající v počátku a končící v bodě $A=(-3,2,-1)$.

Řešení.

1. Vektory $\operatorname{grad}(x^2+y^2-2)\big|_A=(2,2,0)$ a $\operatorname{grad}(xy-z\sqrt{6})\big|_A=(1,1,-\sqrt{6})$ jsou normálové vektory k plochám v bodě A. Svírají úhel $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, a tedy $\alpha=\pi/3$.

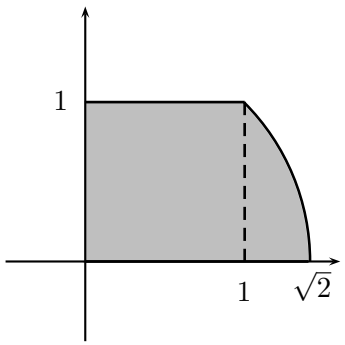
2. Funkce má čtyři stacionární body $(0,\pm\sqrt{2})$ a $(\pm\frac{2}{3},0)$. Hessián je

$$\mathbb{H}=\begin{pmatrix}-18x & -4y\\ -4y & -4x\end{pmatrix}.$$

Body $(0,\pm\sqrt{2})$ jsou sedlové, v bodě $(\frac{2}{3},0)$ je maximum a v bodě $(-\frac{2}{3},0)$ minimum.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f\;dx\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f\,dx\,dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} f\,\varrho\,d\varrho d\varphi+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f\,\varrho\,d\varrho d\varphi.$$



4. Ze symetrie plyne, že těžiště t leží na ose z, tj. $t = (0, 0, t_z)$. Hustota je $d(x, y, z) = z$ a použijeme-li cylindrické souřadnice, pak hodnota z-tové souřadnice t_z je

$$t_z = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_\varrho^h z^2\varrho \; dz\, d\varrho\, d\varphi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_\varrho^h z\varrho \; dz\, d\varrho\, d\varphi} = \frac{\dfrac{\pi h^5}{5}}{\dfrac{\pi h^4}{4}} = \frac{4}{5}\, h.$$

5. Potenciál je $f = xy + xyz + 3yz^3 - z + C$ a vykonaná práce $A = f(-3, 2-1) - f(0, 0, 0) = -5$.