MA 4-20

1. Nalezněte tečnou rovinu ke grafu $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = (1, 1, \pi/4)$ a určete její průsečíky s osami x, y a z.

2. Číslo $\pi/2$ rozložíme na součet tří nezáporných sčítanců, $\pi/2 = x+y+z$. Určete, pro který rozklad má součin $S = \sin x \sin y \sin z$ maximální hodnotu.

3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2y-y^2}}^1 f \, dx \, dy.$$

   nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Částice se pohybuje v poli $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$ po obvodu trojúhelníka T, který leží v rovině $x + y + z = 1$ a má vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Orientace je dána pořadím vrcholů. Pomocí Stokesovy věty zjistěte vykonanou práci.

5. Zjistěte, zda je pole $\vec{F} = (y, x + z \sin y, e^z - \cos y)$ potenciální a v kladném případě nalezněte potenciál.

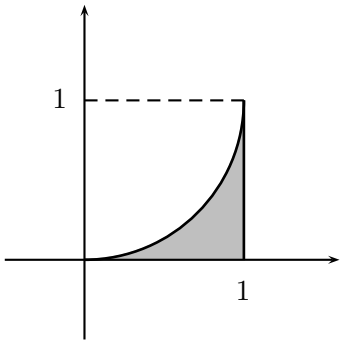
Řešení.

1. Normálový vektor ke grafu je $\vec{n} = \operatorname{grad}\Big(-z + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\Big)\Big|_A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ a tečná rovina $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{1}{4}\pi = 0$. Průsečíky s osami x, y a z jsou postupně $\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{1}{4}\pi$.

2. Lagrangeova funkce je $L = \sin x \sin y \sin z + \lambda(x + y + z - \frac{1}{2}\pi)$. Stacionární body splňují $x = y = z$. Proto vyhovuje pouze bod $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ a maximální hodnota součinu je $1/8$.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\pi/4} \int_{2\sin\varphi}^{1/\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



4. Orientujeme trojúhelník T normálou $\vec{n} = \operatorname{grad}(x+y+z-1) = (1,1,1)$. Protože $\operatorname{rot} \vec{F} = (-2z, -2x, -2y)$ máme podle Stokesovy věty, že práce se rovná

$$A = \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_T -2(z,x,y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dS$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_T (x+y+z)\, dS.$$

   V bodech T je $x+y+z=1$, a proto je $A = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{obsah} T = -1$.

5. Pole je potenciální a potenciál $f = xy - z\cos y + e^z + C$.