MA 5-20

1. Zjistěte derivaci funkce $f(x,y,z) = x^x y - yz\ln(yz)$ v bodě $A = (1, \frac{1}{2}, 2)$ ve směru k bodu $B = (0,1,2)$. Pro jaký směr $\vec{u}$, $\|\vec{u}\| = 1$, je hodnota derivace $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(A)$ minimální?

2. Jaká je vzdálenost plochy $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$ od bodu $(0,0,0)$?

3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{-x^2}^{x} f \, dy \, dx.$$

   nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Z koule o poloměru a a se středem v počátku je vyjmut válec s poloměrem podstavy $\frac{1}{2}a$, jehož osa je tvořena osou z. Zjistěte objem zbylé části koule.

5. Zjistěte, je-li pole $\vec{F} = \left(\cos y + \dfrac{g(y)}{x},\ 2y\ln x - x\sin y\right)$ potenciální pro nějakou funkci $g(y)$ a v kladném případě najděte jeho potenciál.

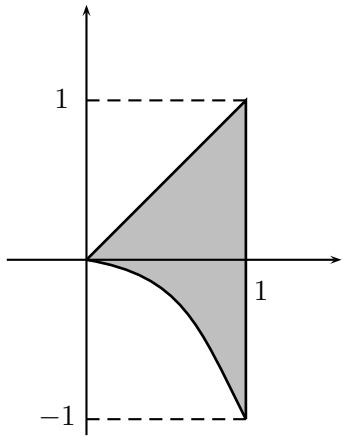
Řešení.

1. Hodnota $\operatorname{grad} f(A) = \big(x^x(1+\ln x)y, x^x - z - z\ln(yz), -y - y\ln(yz)\big)\big|_A = (\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})$. Označíme-li $\vec{v} = B - A$, pak $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \vec{v} \cdot \operatorname{grad} f(A) = -1$. Nejmenší derivace je ve směru $\vec{u} = \dfrac{-\operatorname{grad} f(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Minimalizujeme hodnotu $x^2+y^2+z^2$ za podmínky $4x^2+y^2-z^2-1 = 0$. Lagrangeova funkce je $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - z^2 - 1)$ a má čtyři stacionární body: $(\pm\frac{1}{2}, 0, 0)$ a $(0, \pm 1, 0)$. Vzálenost vychází $d = \frac{1}{2}$.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{-y}}^{1} f \ dx \, dy + \int_0^1 \int_y^1 f \, dx \, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/4}^{0} \int_{-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\varrho \, d\varrho d\varphi + \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\varrho \, d\varrho d\varphi.$$



4. V cylindrických souřadnicích je objem zbylé části koule dán

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-\varrho^2}} \varrho \; dz d\varrho d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi a^3.$$

5. Nutná podmínka $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ je splněna pro funkci $g(y) = y^2$. Výpočtem zjistíme, že potenciál je $f = x\cos y + y^2 \ln x + C$.