MA 6-20

1. Mějme plochu danou $x^2yz+4y^2-2xz^2+8z=0$. V bodě $(0,2,-2)$ této plochy uvažujme přímku p kolmou k ploše. Nalezněte průsečík přímky p s rovinou xy.

2. Mějme trojboký hranol s podstavou tvořenou rovnostranným trojúhelníkem. Objem hranolu je $V=2$. Jaký může mít minimální povrch?

3. Přepište následující integrál

$$\int_0^1 \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{y}} f \, dx \, dy$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Pomocí Gaussovy věty spočtěte tok pole $\vec{F}(x,y,z)=(z^2+x^2,-xy,3y)$ hranicí tělesa omezeného plochami $z=1-y^2$, $z=0$, $x=0$ a $x=3$. Hranice tělesa je orientovaná vnějším normálovým polem.

5. Mějme pole $\vec{F}=(6xz,\cos y,3x^2+y)$ a $\vec{G}=(-e^x,0,2z-y)$. Zjistěte, které z polí $\vec{F}$, $\vec{G}$ a $\vec{F}+\vec{G}$ je potenciální a nalezněte jeho potenciál.

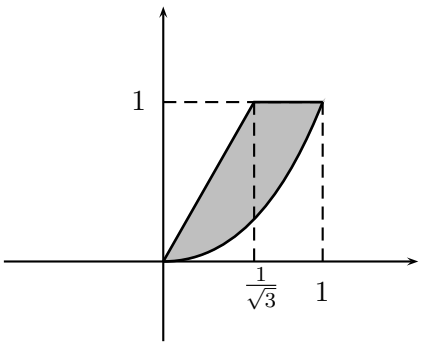
Řešení.

1. Normálový vektor v bodě $(0,2,-2)$ k dané ploše je $(-1,2,1)$. Parametrická rovnice přímky p je $\varphi(t)=(0,2,-2)+t(-1,2,1)$, $t\in\mathbb{R}$ a protíná rovinu xy v bodě pro $t=2$, tj. v bodě $(-2,6,0)$.

2. Označíme stranu rovnostranného trojúhelníka v podstavě jako x a výšku hranolu y. Pak je objem $V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$ a povrch $S=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+3xy$. Lagrangeova funkce $L=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+3xy+\lambda(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2y-2)$ má jediný stacionární bod $(2,2/\sqrt{3})$. Odtud dostaneme, že minimální povrch je $S=6\sqrt{3}$.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_{x^2}^{x\sqrt{3}} f \; dy\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \int_{x^2}^1 f \; dy\,dx$, v polárních souřadnicích

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f\,\varrho\, d\varrho d\varphi + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \int_0^{1/\sin\varphi} f\,\varrho \; d\varrho d\varphi.$$



4. Protože $\mathrm{div}\vec{F} = x$, je tok hranicí $\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} x \; dzdydx = 6$.

5. $\mathrm{rot}\,\vec{F} = (1,0,0)$, $\mathrm{rot}\,\vec{G} = (-1,0,0)$, proto tato pole nejsou potenciální; $\mathrm{rot}\,(\vec{F}+\vec{G}) = (0,0,0)$ a má potenciál $h = 3x^2z - e^x + \sin y + z^2 + C$.