MA 7-20

1. Nalezněte tečnou rovinu ke grafu funkce $z = 2 + x \ln y$ v bodě $(2, 1, 2)$ a zjistěte jaký úhel svírá tato rovina s osou x.

2. Mějme funkci $f(x, y, z) = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Nalezněte její lokální extrémy ležící v 1. oktantu (tj, $x, y, z > 0$).

3. Přepište následující integrál

$$\int_{-1}^{0} \int_{1+x}^{\sqrt{1-x^2}} f \, dy \, dx$$

   nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Uvažujme pole $\vec{F} = (e^x + 1, \beta x^2 y)$. Pomocí Greenovy věty zjistěte hodnotu parametru $\beta \in \mathbb{R}$, aby integrál přes pozitivně orientovanou hranici množiny $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 1 + x^2,\ x \in \langle 0, 1 \rangle\}$ byl alespoň 1.

5. Mějme pole $\vec{F} = (yz, xz, xy + 2z)$. Zjistěte, zda je potenciální a v kladném případě nalezněte jeho potenciál. Spočtěte hodnotu $\int_{(C)} \vec{F} \, d\vec{s}$ podél kladně orientované jednotkové kružnice C ležící v rovině xz a mající střed v počátku.

Řešení.

1. Normálový vektor v bodě $(2, 1, 2)$ k dané ploše je $\vec{n} = (0, 2, -1)$. Tečná rovina má tvar $2y - z = 0$. Pokud si nevšimneme, že osa x leží v této rovině (a tedy s ní svírá nulový úhel), spočteme, že $\vec{n} \cdot (1, 0, 0) = 0$. Je-li normálový vektor kolmý na osu x, svírá tečná rovina s osou x nulový úhel.

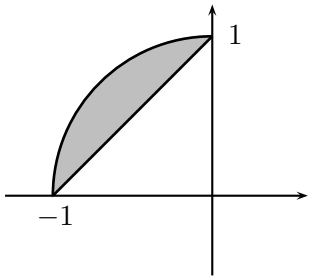
2. Funkce má jediný stacionární bod ležící v 1. oktantu, $A = (1, 1, 1)$. Hessián

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

   je v bodě A pozitivně definitní a f má v A lokální minimum, $f(A) = 4$.

3. Opačné pořadí je $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f \; dx\, dy$, v polárních souřadnicích

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{1/(\sin\varphi - \cos\varphi)}^{1} f\, \varrho \, d\varrho d\varphi.$$



4. Protože $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2\beta xy$, je hledaný integrál roven

$$\int_{(\partial D)} \vec{F} \; d\vec{s} = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{1+x^2} 2\beta xy \; dy\, dx = \frac{11\beta}{12},$$

   a tak $\beta \geq 12/11$.

5. Protože $\operatorname{rot} \vec{F} = (0,0,0)$, je pole potenciální. Potenciál je $f = xyz + z^2 + C$. Integrál potenciálního pole po uzavřené křivce je vždy nulový.