MA 9-20

1. Ke grafu funkce $z = 3x^2 - y^2 + 3y$ nalezněte tečnou rovinu rovnoběžnou s rovinou $6x + y + z = 2020$.

2. Množina C vznikla jako průnik jednotkové sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a roviny $2x + y + z = 0$. Nalezněte na množině C bod s největší z-ovou souřadnicí.

3. S Přepište následující integrál

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f \, dy \, dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\varrho \, d\varphi$.

4. Vypočtěte tok pole $\vec{F} = (xz, yz, z^2)$ hranicí množiny P,

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ z \geq 2\},$$

je-li hranice ∂P orientovaná vnější normálou.

5. Mějme rovinná pole $\vec{F}_1 = (x^2, y^3)$ a $\vec{F}_2 = (y^2, x^3)$. Zjistěte, pro jaké $\tau \in \mathbb{R}$ je pole $\vec{G} = \vec{F}_1 + \tau \vec{F}_2$ potenciální a nalezněte jeho potenciál.

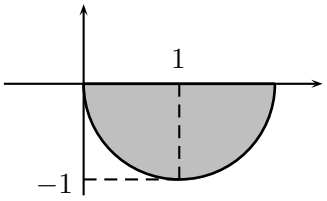
Řešení.

1. Vektor $\operatorname{grad}(3x^2 - y^2 + 3y - z) = (6x, -2y + 3, -1)$ musí být rovnoběžný s vektorem $(6, 1, 1)$, tj, $\alpha(6, 1, 1) = (6x, -2y + 3, -1)$. To nastane v bodě $(-1, 2, 5)$ a tečná rovina $6x + y + z = 1$.

2. Lagrangeova funkce je $L = z + \lambda_1(2x + y + z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Stacionární body jsou $\pm\frac{1}{\sqrt{30}}(2, 1, -5)$. Hledaný bod je $\frac{1}{\sqrt{30}}(-2, -1, 5)$.

3. Opačné pořadí je $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f \, dx \, dy$ a v polárních souřadnicích

$$\int_{-\pi/2}^0 \int_0^{2\cos\varphi} f \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$



4. Protože div $\vec{F} = 4z$, z Gaussovy věty plyne, že tok hranicí je (při použití cylindrických souřadnic)

$$\iint_{(\partial P)} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_P 4z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_2^{\sqrt{9-\varrho^2}} 4z\varrho\, dz d\varrho d\varphi = 25\pi.$$

5. Podmínka $\dfrac{\partial G_2}{\partial x} = \dfrac{\partial G_1}{\partial y}$ dává, že $\tau = 0$. Potenciál je $g = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4 + C$.