OPT skripta do kapsy

Kapitola 2 (Maticová algebra)

- $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \to c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$
- $(\alpha\mathbf{A})^\intercal = \alpha\mathbf{A}^\intercal$, $(\mathbf{A}^\intercal)^\intercal = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal + \mathbf{B}^\intercal$, $(\mathbf{AB})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal$
- $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^\intercal, \operatorname{rank}\mathbf{AB} \le \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}, \operatorname{rank}\mathbf{B}\}$
- Pravá/levá inverze nemusí existovat nebo nemusí být jediná, je-li matice čtvercová a má jednu z nich, pak má i druhou a jsou si rovny.
- Pravá inverze existuje $\iff$ $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ má nezávislé řádky ($\operatorname{rng}\mathbf{A} = \mathbf{R}^m$)
- Levá inverze existuje $\iff$ $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ má nezávislé sloupce ($\operatorname{null}\mathbf{A} = \{0\}$)
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, (\alpha\mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}, (\mathbf{A}^\intercal)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\intercal = \mathbf{A}^{-\intercal}$
- $\det\mathbf{A} = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i-1}^{n} a_{i\sigma(i)}$
- $\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B}), \det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^\intercal, \det\mathbf{A} = 0 \iff \mathbf{A}$ je singulární
- Gaussova eliminace soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: řádkové úpravy zachovají $\operatorname{null}\mathbf{A}, \operatorname{rng}\mathbf{A}^\intercal$, sloupcové úpravy zachovají $\operatorname{rng}\mathbf{A}, \operatorname{null}\mathbf{A}^\intercal$.

Kapitola 3 (Linearita)

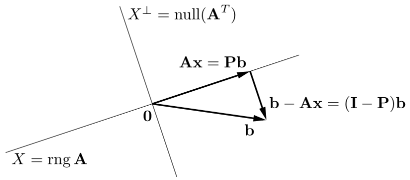
- báze podprostoru X je LN množina vektorů generující X
- Věty: 1) Z každé množiny vektorů lze vybrat bázi lin. obalu.
  2) Každou LN množinu vektorů podprostoru lze doplnit na jeho bázi.
  3) Každý lin. podprostor má (alespoň jednu) bázi a každá jeho báze má stejný počet vektorů.
- X, Y množiny:$X \subseteq Y \to \dim X \le \dim Y$, $X \subseteq Y \wedge \dim X = \dim Y \to X = Y$
- $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}, \operatorname{null}\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$(obojí pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$)
- TFAE pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\mathbf{AA}^\intercal \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je regulární; $\operatorname{rng}\mathbf{A} = \mathbb{R}^m$; $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení $\forall\mathbf{y}$; $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$; řádky $\mathbf{A}$ nezávislé; zobr. $\mathbf{f(x)}$=$\mathbf{Ax}$ je surjektivní, tj. $\mathbf{f}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$; $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- TFAE: $\operatorname{null}\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$; $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{x}$=$\mathbf{0}$;$\operatorname{rank}\mathbf{A} = n$; sloupce $\mathbf{A}$ jsou LN; $\mathbf{A}$ má levou inverzi; $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ je regulární
- $\operatorname{rng}\mathbf{AB} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{A}$ (rovnost, pokud jsou řádky $\mathbf{B}$ lineárně nezávislé)
- $\operatorname{null}\mathbf{AB} \supseteq \operatorname{null}\mathbf{B}$ (rovnost, pokud jsou sloupce $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé)
- Věta (rozklad podle hodnosti): Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r existují $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ t.ž. $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$
- $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^\intercal$
- Věta (o dimenzích): Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí: $\dim\operatorname{rng}\mathbf{A} + \dim\operatorname{null}\mathbf{A} = n$
- Je-li X lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak X+$\mathbf{x}$ je afinní podprostor $\mathbb{R}^n$.
  Je-li A afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in A$, pak $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$.
  Je-li A afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, pak $A - \mathbf{x} = A - \mathbf{y}$.
- Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor $\iff$ je množinou řešení nějaké lin. soustavy, tj. existují $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ t.ž. $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$
- Pro body $\mathbf{x_1}, \dots \mathbf{x_n} \in \mathbb{R}^n$ TFAE: žádný bod není roven aff. komb. ostatních; vektory $\{\mathbf{x_i} - \mathbf{x_1}\}$ jsou LN; homogenní vektory s těmito $\mathbf{x_i}$ jsou LN

Kapitola 4 (Ortogonalita)

- Skalární součin: $\mathbf{x}^\intercal\mathbf{y} = \sum x_i y_i$, Úhel mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je $\cos\phi = \frac{\mathbf{x}^\intercal\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$.
- CSB-nerovnost sk. součinu: $(\mathbf{x}^\intercal\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}^\intercal\mathbf{x})(\mathbf{y}^\intercal\mathbf{y})$
- Euklidovská norma: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\intercal\mathbf{x}}$,
- Ortogonální vektory: $\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}^\intercal\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{y}$ je ortogonální na množinu X, iff $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ $\forall\mathbf{x} \in X$ (stačí, je-li kolmý na bázové vektory X)
- Ortogonální prostory: $X\perp Y$, je-li $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ $\forall\mathbf{x} \in X$, $\forall\mathbf{y} \in Y$, dále platí $X\perp Y \Rightarrow X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$
- Ortogonální doplněk: $X^\perp = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}\perp X\}$.
- Platí $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$: 1) $\dim X + \dim X^\perp = n$, 2) $(X^\perp)^\perp = X$
  3) $X\perp Y \wedge \dim X + \dim Y = n \Rightarrow Y = X^\perp$.
- $\forall\mathbf{A}$ platí: 1) $(\operatorname{rng}\mathbf{A})^\perp = \operatorname{null}(\mathbf{A}^\intercal)$, 2) $(\operatorname{null}\mathbf{A})^\perp = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^\intercal)$.
- Mn. vektorů: $\{\mathbf{u}_1, \dots\mathbf{u}_n\}$ je ortonormální, iff $\mathbf{u}_i$ je normalizovaný a $\mathbf{u}_i^\intercal\mathbf{u}_j = \delta_{ij}$. $\mathbf{u}_i$ ortonormální a $\mathbf{x} = \sum\alpha_i\mathbf{u}_i$, pak $\alpha_i = \mathbf{u}_i^\intercal\mathbf{x}$.
- Matice s ortonormálními sloupci: $\mathbf{U}^\intercal\mathbf{U} = \mathbf{I}$. Čtvercová $\mathbf{U}$ je ortogonální a platí pro ni navíc $\mathbf{U}^\intercal = \mathbf{U}^{-1}$, $\mathbf{UU}^\intercal = \mathbf{I}$.
- Matice s ortonormálními sloupci zachovává skalární součin a normu $f(\mathbf{x})^\intercal f(\mathbf{y}) = (\mathbf{Ux})^\intercal(\mathbf{Uy}) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{U}^\intercal\mathbf{Uy} = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{y}$
- (Isometrie): $\|\mathbf{f(x)}\| = \|\mathbf{Ux}\| = \|\mathbf{x}\|$ (viz výše)
- QR rozklad: $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonální $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ horní trojúhelníková.
  - **Redukovaný** QR: $\mathbf{Q}$ stejné rozměry jak $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ čtvercová (v plném je jsou typicky poslední řádky R nulové, tak ty (a to s čím se násobí), můžeme ignorovat
- Ortogonální projekce: Pokud $\mathbf{U}^\intercal\mathbf{U} = \mathbf{I}$ tak projekce na $\operatorname{rng}\mathbf{U}$: $\mathbf{x} = \mathbf{UU}^\intercal\mathbf{z}$. Matice $\mathbf{P} = \mathbf{UU}^\intercal$ je ortogonální projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{U}$. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^\intercal$. Platí $\operatorname{rng}\mathbf{P} = X$, $\operatorname{null}\mathbf{P} = X^\perp$. Ort. projektor na $\operatorname{rng}(\mathbf{U})^\perp = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{z}$.
- pro ortogonální matici platí $\det\mathbf{U} = 1$ (rotace) nebo $\det\mathbf{U} = -1$ (reflexe)
- Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od lin. podp. $X^\perp$: $\|\mathbf{UU}^\intercal\mathbf{z}\| = \|\mathbf{U}^\intercal z\|$, ($\operatorname{rng}\mathbf{U} = X$)
- Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od aff. podprostoru
  $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{U}^\intercal\mathbf{x} = b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{U}^\intercal(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = 0\} = X^\perp + \mathbf{x}_0$
  $\mathbf{U}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}$: $\|\mathbf{U}^\intercal\mathbf{z} - \mathbf{b}\|$.
- vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od nadroviny $\mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $\frac{|\mathbf{a}^\intercal\mathbf{z} - \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$

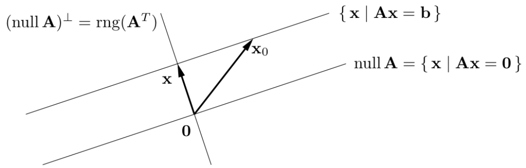
Kapitola 5 (Nehomogenní lin. soustavy)

- $\forall\mathbf{A}$ platí 1) $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^\intercal)$, 2) $\operatorname{null}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) = \operatorname{null}(\mathbf{A})$.
- $\to \operatorname{rank}(\mathbf{AA}^\intercal) = \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\mathbf{A}^\intercal$
- Platí 1) $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ regulární iff $\mathbf{A}$ LN sloupce, 2) $\mathbf{AA}^\intercal$ regulární, iff $\mathbf{A}$ LN řádky.



Obrázek 1: Nejmenší čtverce

- Metoda nejmenších čtverců: hledáme $\min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$. Pak platí $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{Ax}^* = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{b}$. Z toho $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$, pokud $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ regulární, jinak více řešení $\mathbf{x}$ (affiní podprostor)
- Ortogonální projekce: Když $\mathbf{x}$ řeší norm. rovnici, pak $\mathbf{Ax} = \mathbf{Pb}$, $\mathbf{P} = \mathbf{AA}^+$ je projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{A}$.
  Reduk. QR rozkladem: po dosazení $\mathbf{A} := \mathbf{QR}$, $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\intercal\mathbf{b}$. $\mathbf{R}$ regulární pro $\mathbf{A}$ LN sloupce.
- Lin. regrese: $\min_\theta \sum(y_i - f(x_i, \theta))^2$, pro f v θ lineární, $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\theta\|$.
- Vícekrit. nejmenší čtverce (nezáporná kombinace více kritérií):
  $\| \left[\sqrt{\mu_i}(\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)\right] \|^2 = \| \left[\sqrt{\mu_i}\mathbf{A}_i\right]\mathbf{x} - \left[\sqrt{\mu}_i\mathbf{b}_i\right] \|^2 = \|\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'\|^2$.
  Řešení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pro malé $\mathbf{x}$ je $\mathbf{x} = \mathbf{A}_\mu^+\mathbf{b}$, $\mathbf{A}_\mu^+ = (\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A} + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^\intercal$.



Obrázek 2: Nejmenší norma

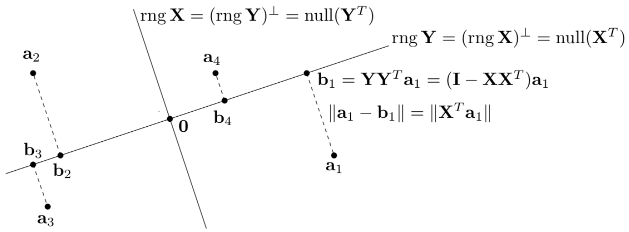
- *NEJMENŠÍ NORMA:* Řešení s nejmenší normou pro nedourčenou soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: $\min\{\|\mathbf{x}\|^2 | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$, pak pro $\mathbf{x}^*$ platí $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\intercal(\mathbf{AA}^\intercal)^{-1}\mathbf{b}$, tentokrát $\mathbf{AA}^\intercal$ regulární, jinak více řešení x (affiní podprostor)

Kapitola 6 (Spektrální rozklad a kvadratická forma)

- polynom je homogenní, pokud jsou všechny monomy stejného stupně
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad \mathbf{Av} = \mathbf{v}\lambda$, $\quad \mathbf{AV} = \mathbf{V\Lambda}$
- Pokud $\mathbf{V}$ je reg. (tj. $\mathbf{A}$ má n LN vlastních vek.), je invertovatelná a platí $\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V^{-1}}$.
- *VĚTA:* Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pak FSAE: $\mathbf{A}$ je symetrická $\iff \forall$ vl. čísla $\mathbf{A}$ jsou reálná a $\mathbf{A}$ má n vlastních vektorů které jsou po dvojicích ortogonální.
  DŮSLEDEK: Pro každou sym. $\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^\intercal = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\intercal + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^\intercal$ lze zvolit $\mathbf{V}$ ortogonální. $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{\Lambda}$
- *SYMETRIZACE:* $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\intercal)$
- Definitnost kvadratické formy: Čtvercovou matici nazýváme:
  - **P[N]SD** když pro každé $\mathbf{x}$ platí $\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} \ge 0$ $[\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} \le 0]$
  - **P[N]D** když pro každé $\mathbf{x} \ne 0$ platí $\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} > 0$ $[\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} < 0]$
  - **INDEF** když exist.$\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ tak, že $\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} > 0$ a $\mathbf{y}^\intercal\mathbf{Ay} < 0$
- *VĚTA:* Symetrická matice je
  - PD, právě když všechny vůdčí hlavní minory jsou kladné.
  - PSD, právě když všechny hlavní minory jsou nezáporné.
- *DIAG. KVADR. FORMY:* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{V\Lambda V}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{y}^\intercal\mathbf{\Lambda y}$
- *VĚTA:* Symetrická matice je
  - P[N]SD $\iff \forall$ vl.č. nezáporná [nekladná]
  - P[N]D $\iff \forall$ vl.č. kladná [záporná]
  - INDEF $\iff$ aspoň jedno kladné a jedno záporné.
- *KVADRATICKÁ FUNKCE:* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} + \mathbf{b}^\intercal\mathbf{x} + c$
- *DOPLNĚNÍ NA ČTVEREC:* $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\intercal\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - y_0$.
  TRIK: $\mathbf{b} = -2\mathbf{Ax}_0$, $c = \mathbf{x}_0^\intercal\mathbf{Ax}_0 + y_0$ (vtip pro zoufalé studenty při testu: „Víte, jak si utírá zadek kouzelník? Trikem!“ (A teď běž zase počítat...))
- *KVADRIKA* je nultá vrstevnice kvadratické funkce, tedy $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} + \mathbf{b}^\intercal\mathbf{x} + c = 0\}$. Jedná se zobecnění kuželoseček (n=2), Pokud lze doplnit na čtverec, tvary dle matice $\mathbf{A}$ (PD, ND: elipsoid, INDEF: hyperboloid). Pokud $\operatorname{rank} A < n$, je kvadrika degenerovaná. Kvadrika může být $\emptyset$. Pokud kvadratická funkce nelze doplnit na čtverec, jsou tvary složitější než elipsa/hyperbola.

Kapitola 7 (Použití spektrálního rozkladu)

- Def. (stopa): $\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + \dots + a_{nn}$
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$, $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\intercal)$, $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$ (cykličnost stopy),
  Každá čtvercová matice: $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$
- Def. (skalární součin matic): $\langle\mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$,
  $\langle\mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \langle\mathbf{B}, \mathbf{A}\rangle = \langle\mathbf{A}^\intercal, \mathbf{B}^\intercal\rangle = \langle\mathbf{B}^\intercal, \mathbf{A}^\intercal\rangle$,
  $\langle\mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}^\intercal) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}^\intercal)$
- $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A})} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- Dále předpokládáme, že vl. čísla jsou řazena vzestupně $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$
- *NEJMENŠÍ STOPA:* Platí $\min\{\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^\intercal\mathbf{x} = 1\} = \lambda_1$ a min. hodnota se nabývá pro $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$
  VĚTA: Nechť $k < n$. Platí
  $\min\{\mathbf{x}^\intercal\mathbf{Ax} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^\intercal\mathbf{x} = 1, \mathbf{v}_1^\intercal\mathbf{x} = \dots = \mathbf{v}_k^\intercal\mathbf{x} = 0\} = \lambda_{k+1}$ a min. hodnota se nabývá pro $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{k+1}$
  VĚTA: Nechť $k \le n$. Platí
  $\min\{\operatorname{tr}(\mathbf{X}^\intercal\mathbf{AX}) \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \mathbf{X}^\intercal\mathbf{X} = \mathbf{I}\} = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ a minimum se nabývá pro $\mathbf{X} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]$



Obrázek 3: Proložení bodů podprostorem

- *PROLOŽENÍ BODŮ PODPROSTOREM:* Máme body $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, prokládáme podprostorem $\operatorname{rng}\mathbf{Y}\dim k \le n$. Vzdálenost bodu od $\operatorname{rng}\mathbf{Y}$ je délka projekce na jeho ort. doplněk $(\operatorname{rng}\mathbf{Y})^\perp = \operatorname{rng}\mathbf{X}$.
  Tedy $\|\mathbf{X}^\intercal\mathbf{a}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{X}^\intercal\mathbf{a}_m\|^2 = \|\mathbf{AX}\|^2$.
  Tedy máme úlohu $\min\{\|\mathbf{AX}\|^2 | \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}, \mathbf{X}^\intercal\mathbf{X} = \mathbf{I}\}$
  Protože $\|\mathbf{AX}\|^2 = \operatorname{tr}\{\mathbf{X}^\intercal\mathbf{A}^\intercal\mathbf{AX}\}$, spočítáme spekt. rozklad $\mathbf{V\Lambda V}^\intercal$ matice $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$. Máme $\mathbf{V} = [\mathbf{X} \ \ \mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\mathbf{X}$ je řešní úlohy proložení bodů podprostorem a $\mathbf{Y}$ je Easy.
- *MATICE NEJNIŽŠÍ HODNOSTI:* $\min\{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 | \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \operatorname{rank}\mathbf{B} \le k\}$. Stejná opt. hodnota jako výše, stačí najít $\mathbf{B} = \mathbf{AYY}^\intercal = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{XX}^\intercal)$. Opt. hodnota je $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-k}$ (ze spektra matice $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$).
- Když chceme promítat na affiní podprostor, musíme body $a_1 \dots a_m$ posunout tak, aby jejich težiště $\bar{a} = \frac{1}{m}(\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_m)$ leželo v počátku.
- *SVD ROZKLAD:* Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lze rozložit jako $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^\intercal = s_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\intercal + \dots + s_p\mathbf{v}_p\mathbf{v}_p^\intercal$, kde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je diag. s diag. prvky $s_1, \dots, s_p$ (kde $p = \min\{m, n\}$) a $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$ jsou ortogonální. *DŮSLEDEK:* nenulová sing. čísla

matice $\mathbf{A}$ jsou druhé odmocniny nenulových vl. čísel matic $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}\mathbf{A}^\intercal$ (která jsou tudíž stejná).

- řešení úlohy *MATICE NEJMENŠÍ HODNOSTI* pomocí SVD rozkladu (Eckart - Young): Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\intercal$ je SVD matice $\mathbf{A}$. Řešení úlohy je $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{S}'\mathbf{V}^\intercal = s_{p-k+1}\mathbf{u}_{p-k-1}\mathbf{v}^\intercal_{p-k+1} + \ldots + s_p\mathbf{u}_p\mathbf{v}^\intercal_p$, kde $\mathbf{S}'$ se získá z matice $\mathbf{S}$ vynulováním $p-k$ nejmenších diagonálních prvků (v sumě dryád (#joke) tedy předpokládáme $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_p$)

Kapitola 8 (Nelineární funkce a zobrazení)

- Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $\mathbf{X}$. Pak $f+g, f-g, fg$ jsou spojité. Pokud $g(\mathbf{x}) \neq 0$, je tam spojitá i f/g. Skládání funkcí (vnější $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) spojitých je také spojité. Zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, jehož složky jsou spojité do $\mathbb{R}$, je také spojité.
- Zobrazení $\mathbf{f}$ je v bodě $\mathbf{x}$ spojitě diferencovatelné, jestliže v bodě $\mathbf{x}$ ex. všechny parciální derivace a jsou v tomto bodě spojité.
- Je-li zobrazení v bodě spojitě diferencovatelné, je v tomto bodě diferencovatelné.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\intercal\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\intercal$	$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{2x}^\intercal$
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\intercal)$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{g}'(\mathbf{x})$
$f(\mathbf{x}) = \lvert\lvert\mathbf{x}\rvert\rvert$	$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\intercal/\lvert\lvert\mathbf{x}\rvert\rvert$		

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^\intercal\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad f'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^\intercal\mathbf{h}'(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x})^\intercal\mathbf{g}'(\mathbf{x})$
- Směrová derivace $\boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{v})$
- Nechť zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}$. Pak jeho směrová derviace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.
- Gradient je transpozicí derivace a udává směr největšího růstu funkce.
- Hesián je symetrický, pokud druhé parc. derivace existují a jsou spojité.
- Taylorův polynom 2. řádu v bodě $\mathbf{x_0}$ je $T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + f'(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^\intercal f''(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$
- Označme $B_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \epsilon\}$ (n-rozměrná koule bez hranice). Mějme množinu $X \subseteq \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nazveme její:
  - vnitřní bod iff $\exists\epsilon > 0$ t.ž. $B_\epsilon \subseteq X$,
  - hraniční bod iff $\forall\epsilon > 0$ je $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq X \wedge B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$

Kapitola 9 (Volné lokální extrémy)

- Fermatova věta: Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ diferencovatelná a má v tomto bode lokální extrém. Pak $f'(x) = 0$.
- Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny X. Nechť je fce f v bode $\mathbf{x}$ dvakrát diferencovatelná a platí $f'(\mathbf{x}) = 0$. Pak:
  - Je-li $\mathbf{x}$ lok. min. [max] fce f na X, pak Hessova matice f'' je pos.[neg.] semidefinitní. Je-li pos.[neg.] definitní, pak je to ostré min.[max.]. Je-li indefinitní, pak $\mathbf{x}$ není lok. extrém.
- Iterační metody: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{v}_k$, směr $\mathbf{v}_k$ je sestupný, jestliže: $f'(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k < 0$.
- Gradientní metoda: $\alpha\mathbf{v}_k = -\alpha f'(\mathbf{x}_k)^\intercal = -\alpha\nabla f(\mathbf{x}_k)$. BACHA! Gradient se dělá z účelové fce, tedy z $g(x)^\intercal g(x)$, nikoli jen z $g(x)$. (viz zápočťák)
- Newtonova metoda (hledání kořenu): $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$
- Newtonova metoda - hledaní min.: $\mathbf{x}_{x+1} = \mathbf{x}_k - f''(\mathbf{x}_k)^{-1}f'(\mathbf{x}_k)^\intercal$. Odvozeno z: $T^2_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + f'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^\intercal f''(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ nebo z hledání kořenů (výše) pro funkci $\mathbf{g} = f'^\intercal$
- Gauss-Newton ($\min \|g(\mathbf{x})\|^2$): $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^+\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ Odvozeno z: Normální rovnice (kap. 5): $\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\intercal\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\intercal\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ Metoda s jednotkovou délkou kroku může vždy divergovat, vhodnou volbou α lze konvergenci zajistit.
- Levenberg-Marguardt: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\intercal\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k) + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\intercal\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ Pro malé μ se blíží Gauss-Newtonově metodě, pro velké gradienty.

Kapitola 10 (Lokální extrémy vázané rovnostmi)

- Lineární omezení: $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, za podmínek: $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ Převedeme: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}((\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^\intercal(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$, tedy podm. stacionarity: $\mathbf{A}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}^\intercal\lambda = \mathbf{A}^\intercal\mathbf{b} \wedge \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, což lze převést na maticový tvar.
- Nechť je zobrazení $\mathbf{g}$ v bodě $\mathbf{x} \in X$ a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je tečný k X v bodě $\mathbf{x}$. Pak $\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0 \to$ Gradient je kolmý na vrstevnici.
- Pokud navíc $\operatorname{rank}\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = m$ (tj. LN řádky) a vektor $\mathbf{v}$ je $\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0$, pak $\mathbf{v}$ je tečné na X v bodě $\mathbf{x}$.
- Lagrangián: $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^\intercal\mathbf{g}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x} + \ldots + \lambda_m g_m(\mathbf{x}))$ a položíme parc. derivace podle všech proměnných rovny 0.
- **Regulární bod**: Gradienty vazební fce $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ na množině X jsou lin. nezávislé,

Kapitola 11 (Lineární programování)

- Stand. tvar: $\min\{\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mxn}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\}$
- Stand. úpravy: $\max \mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} = \min -\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x}, \quad \mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \to -\mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}$
  - Rovnic. tvar: $\min\{\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
  - Slackové proměnné: $\mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \to (\mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} - u = \mathbf{b} \ \wedge \ u \geq 0)$, $\leq \to +u$
  - Neomezená proměnná: $x \in \mathbb{R} \to x = x^+ - x^- \wedge (x^+, x^-) \geq 0$
  - Po částech afinní funkce: $f(x) = \max(\mathbf{c_i}^\intercal\mathbf{x} + d_i)$, Chceme min: $\min\{f(x) | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} = \min\{z | (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall i : \mathbf{c_i}^\intercal + d_i \leq z, \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$
- Axiomy normy: $\|\mathbf{x}\| = 0 \to \mathbf{x} = 0, \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
- Definice p-normy: $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + .. + |x_n|^p)^{1/p}, p \geq 1$
- Typické normy: $\|x\|_1 = \sum |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}, \|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$
  Pro $\mathbf{A}$ s LN sloupci je také $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$ normou.
  Řešení přeurčené lin soustavy v p-normě, tedy: $min_x \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p, x \in \mathbb{R}^n$
  $p = \infty$: $\min\{z | x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, -z\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq z\mathbf{1}\}$
  $p = 1$: $\min\{\mathbf{1}^\intercal\mathbf{z} | x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m, -\mathbf{z} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{z}\}$
- LP relaxace: $\min\{\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} | x \in \{0,1\}^n \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ pracujme s: $x \in [0,1]^n$ $\to$ tato 'uvolněná' úloha pak nemá větší optimální hodnotu než původní úloha, to proto že optimalizujeme přes větší množinu!

Kapitola 12 (Konvexní množiny a mnohostěny)

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní, iff: $x, y \in X, 0 \leq \alpha \leq 1 \to (1-\alpha)x + \alpha y \in X$ Tedy každé dva body v množině propojím úsečkou která je celá v této množině.
- Vážený součet $\alpha_1\mathbf{x_1} + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ se nazývá jejich:
  - lineární kombinace $\iff \alpha_i \in \mathbb{R}$
  - afinní kombinace $\iff \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$
  - nezáporná kombinace $\iff \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall\alpha_i \geq 0$
  - konvexní kombinace $\iff \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \quad \forall\alpha_i \geq 0$
- Konvex. (jiný) obal vektorů je množina všech jejich konv. (jiných) kombinací. Konvex obal množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konv. množin, které X obsahují.
- Množina uzavřená vůči kombinacím lineárním je lin. podprostor, afinním je afinní podp., nezáporným je konvexní kužel a konvexním je konvexní množina.
- DŮSLEDEK: Průnik (konečně či nekonečně) konv. množin je konv. množina.
- Konvexní mnohostěn je průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů, je to tedy množina: $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$. Příklady konv. mnohostěnů: $\emptyset, \mathbb{R}^n$, intervaly $(-\infty, a], [a, \infty)$, každý aff podpr, $[-1, 1]^n$
- Co není polyedr: koule v $\mathbb{R}^n n \geq 2$, interval $[0, a)$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{b}\}$
- Bod $x \in X$ je extremálním bodem, iff neex. dva různé body z X takové, že x je střed úsečky tyto body spojující.
- TFAE: x je extremální bod polyedru, $\exists\ I \subseteq \{1..m\}$ tak že $\mathbf{A_I}\mathbf{x} = \mathbf{b_I}$ a $\mathbf{A_I}$, což má LN sloupce (a $Ax = b$).
- Opěrná nadrovina konv. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je nadrovina $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ a $H \cap X \neq \emptyset$. Množina $H \cap X$ se nazývá stěna mnohostěnu. Stěna dim 0 je vrchol, dim 1 je hrana a dim $X - 1$ je faseta. Každý extremální bod je vrchol.
- Je-li H opěrná nadrov. X, pak extr. bod $X \cap H$ je i extr. bod X.
- TFAE: polyedr má alespoň jeden extr. bod, polyedr neobsahuje přímku
- Mějme konvexní mnohostěn, který neobsahuje přímku. Jestliže lineární funkce má na tomto mnohostěnu minimum, pak tato funkce nabývá na mnohostěnu minima aspoň v jednom z jeho extremálních bodů.

Kapitola 14 (Dualita)

$$\min\{\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x}\} \text{ za podmínek } \begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \begin{matrix} \in\mathbb{R} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

$$\max\{\mathbf{b}^\intercal\mathbf{y}\} \text{ za podmínek } \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{matrix} \in\mathbb{R} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} \quad A^\intercal \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}$$

Dále: $\mathbf{x}$ příp. primární řeš., $\mathbf{y}$ příp. primární řeš.

- *SLABÁ DUALITA:* $\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\intercal\mathbf{y}$
- $\to$ pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou přípustná řešení primární a duální úlohy a $\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}^\intercal\mathbf{y}$, pak jsou to optimální hodnoty obou úloh.
- *PODM. KOMPL.*: $\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}^\intercal\mathbf{y}$ iff na každém řádku alespoň jedna rovnost (aktivní podmínka)
- *SILNÁ DUALITA:* Primár má opt. řeš. iff duál má opt. řeš. $\mathbf{y}$ máli Primár má opt. řeš. $\mathbf{x}$ a duál má opt. řeš. $\mathbf{y}$, pak $\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} = \mathbf{b}^\intercal\mathbf{y}$
-

primární/duální	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	ano	ne	ne
neomezená	ne	ne	ano
nepřípustná	ne	ano	ano

- *STÍNOVÉ CENY:* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^\intercal\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^\intercal\mathbf{y} | \mathbf{A}^\intercal\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$ (přičemž primár i duál mají opt. řeš.) Pokud má duální úloha pro dané $\mathbf{b}$ jediné opt. řeš. $\mathbf{y}^*$, pak je fce f v bodě $\mathbf{b}$ diferencovatelná a $\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial b_i} = \mathbf{y}^*_i$.

Kapitola 15 (Konvexní funkce)

- Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní, iff: $x, y \in X, 0 \leq \alpha \leq 1 \to f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$
- konkávní je funkce na množině iff $-f$ je konvexní na množině
- Jensenova nerovnost zobecňuje podmínku konvexity fce: $x_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \to f(\alpha_1 x_1 + .. + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + .. + \alpha_k f(x_k)$
- Př: $f(x) = \max(x_i) \to f((1-\alpha)x + \alpha y) = \max((1-\alpha)x_i + \alpha y_i) \leq \max((1-\alpha)x_i) + \max(\alpha y_i) = (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$..fce je konvexní
- Příklady konvexních fcí: $f(x) = e^{ax}$ $a \in \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, $f(x) = x^a$ $a \geq 1 \vee a \leq 0$ na $\mathbb{R}_{++}$,$f(x) = |x|^a$ $a \geq 1$ na $\mathbb{R}$, $f(x) = \mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} + b$ je zároveň konv. i konk, $f(x) = \mathbf{x}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{x}$ konv. pro $\mathbf{A}$ PSD, každá norma je konv., $xlogx$ je konvexní na $\mathbb{R}_{++}$
- Příklady konkávních fcí: $f(x) = \log(x)$ na $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbf{x}^\intercal\mathbf{A}\mathbf{x}$ konk. pro $\mathbf{A}$ NSD, $f(x) = x^a$ $0 \leq a \leq 1$ na $\mathbb{R}_{++}$
- Epigraf fce je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | f(x) \leq y\}$..množina nad grafem fce
- Subkontura výšky y je $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq y\}$
- Funkce je konvexní iff její epigraf je konvexní. Obousměrná implikace.
- Každá subkontura konv. fce je kovexní množina. Obrácená implikace neplatí.
- Ať je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná. Pak je f konvexní na $\mathbb{R}^n$, iff pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí: $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$..tzn T_1 fce f je v každém bodě $x \in X$ všude menší nebo roven fci f
- Ať je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dvakrát diferencovatelná. Pak je f konvexní na $\mathbb{R}^n$, iff v každém $x \in \mathbb{R}^n$ je $f''(x)$ PSD.
- Ať $g_1..g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konvexní, pak pro $\alpha_i \geq 0$ je $f = \alpha_1 g_1 + .. + \alpha_k g_k$ také konvexní. Může se stát, že i takováto kombinace nekonvex. fcí je nakonec konvexní fce ($f(x) = x^3 - x^3$).
- Skládání konvex. fcí nemusí být konvex. fce. Např.
- Ať fce $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvex., $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, pak fce $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ je konvexní.
- Ať I je libovolná množina, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konv. fce. Pak: $f(x) = \max_{i \in I}(g_i(x))$ je konv fce, předpokládáme že pro každé x maximum existuje. Dané tím, že epigraf f je průnikem epigrafů g_i.

Kapitola 16 (Konvexní optimalizace)

- Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (tj. je to konvexní optim. úloha). Pak každé lok. min. fce f na X je zároveň globální.
- Příklady konvexních úloh: lineární programování, kvadratické programování, kvadratické programování s kvadratickými omezením, programování na kuželu druhého řádu, semidefinitní programování.
- Příklad nepřípustné úlohy: $\max\{b \mid b = z + s + 100p, b \leq 40, b \geq 20\}$, kde z...znalosti, s...štěstí, p...tento přehled, b...body ze zkoušky
- Konvexní relaxace: když mám konv. fci na složité (nekonv.) množině, vezmu její konv. podmnožinu a získám alespoň horní odhad minima.

Autorství

Vytvořeno podmnožinou S ($|S| = 8$) členů (ne)chvalně (ne)proslulé tajné skupiny zvané *Memy pro zoufalce na B3B33* (značíme M).
Za obsah nikdo (rozhodně ani množina S, ani M) nikomu neručí - je možné, že jsme si vše jen zlovolně vymysleli. :-)
Pokud byste chtěli zdrojový kód, ozvěte se na hodandom@fel.cvut.cz. Šetřte papír, tiskněte naši jednostránkovou verzi!

Hodně štěstí ke zkoušce, nechť vás provází síla a nejmenší čtverce!