Maticová algebra

Symetrická matice: $A^T = A$
Antisymetrická matice: $A^T = -A$
Pseudo inverze $A^+ = (A^T A)^- 1$
Sklární součin pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Ortogonální matice je čtvercová a všechny vektory jsou navzájem kolmé.

Ortonormální matice splňuje podmínky ortogonální a její vektory mají normu 1

Normy

$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ $\quad \|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$
$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$ $\quad \|\mathbf{v}\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Frobeniova norma $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)} = \sqrt{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}$,
kde $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$
jsou vlastní čísla PSD matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$.

Vzorečky inverzí

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ čtv. matice má inverzi iff regulární

Vzorečky determinantu a stopy

$det(AB) = det(A) * det(B)$
$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
$det(A^T) = det(A)$
$det(AB) = det(BA)$ $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$
$\operatorname{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A})$
$\operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$
$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$
$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, kde $\mathbf{A}$ je symetrická

Vzorečky prostorů

$(rng(A))^\perp = null(A^T)$
$rng(AB) \subseteq rng(A)$
$null(AB) \supseteq null(B)$
$rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$

Taylorův polynom

$T_x^k(y) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(y-x)^i$,
$T_x^0(y) = f(x)$,
$T_x^1(y) = f(x) + f'(x)(y-x)$,
$T_x^2(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2$.

QR rozklad

$A = QR$
Q - ortogonální matice, R - horní trojúhelníková

Použití při řešení lineárních rovnic

$Ax = b$, rozložíme $A = QR$ a vynásobíme soustavou zleva Q^T což dá:
$Rx = Q^T b$

Nehomogenní lineární soustavy $Ax = b$

- nemá řešení $\iff b \notin rng(A)$
- jediné řešení $\iff b \in rng(A)$ a A má LN sloupce
- nekonečně řešení $\iff b \in rng(A)$ a A má LZ sloupce

Afinní prostory a zobrazení

af. kombinace: $\alpha_1 * x_1 + \ldots + \alpha_n * x_n$
množina A je af. podprostor $\iff$ je množina řešení nějaké soustavy $Ax = b$

af. nezáv.: Body $x_1, \ldots, x_k \in Rn$ jsou afinně nezávislé, jestliže žádný není afinní kombinací ostatních.

Ortogonalita

$cos(\rho) = \frac{x^T y}{\|x\| \|y\|}$
Matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonormální sloupce $\implies m \geq n, U^T U = I$, isometrie

Ortogonální projektory

Nechť X tvoří sloupce matice A, která má LN sloupce a $X = rng(A)$ pak projektor je roven $P = AA^+ = A(A^T)^{-1} A^T$
Pokud P je projektor na X pak $(I - P)$ je projektor na $x^\perp$
Pro projektor P platí že $P^2 = P = P^T$
$rng(P) = X, null(P) = X^\perp$
Pokud má matice jeden řádek $P = \frac{aa^T}{a^T a}$

Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu b od prostoru X je $\|(I - P)b\|$
Pokud b je bod, X, $a^T x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ vzdálenost bodu je: $\frac{|a^T b - c|}{\|a\|}$

Gramova-Schmitodtova ortonormalizace

neortonormální vektory $a = a_1, \ldots, a_n$, se dají převést na ortonormální vektory $v = v_1, \ldots, v_n$, tak že $span\{a\} = span\{v\}$
$v_1 = a_1$
$v_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1$
$v_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2$
atd... potom: $v_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

MNČ

Lze zapsat jako $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \|Ax - b\|^2$ nebo $\underset{y \in rng(A)}{\text{Min}} \|y - b\|^2$
Algebraicky lze zapsat jako $A^T Ax = A^T b$

- A - matice koeficientů
- b - vektor výsledků
- x - vektor parametrů

pozorování je matice (a,b), kde a, jde do A a b jde do vektoru b (aka jde o něco jako funkci $b = f(a)$)

A má LN sloupce

- má jedno řešení
- A má LN sloupce $\iff x = (A^T A)^{-1} A^T b$

Řešení QR rozkladem

$A = QR$
$Rx = Q^T b$

A má LZ sloupce

- má více řešení
- Najdeme jedno partikulární a přidáme k němu prostor $null(A^T A) = null(A)$

Vlastní čísla

$Av = \lambda * v, v \neq o, \implies (A - \lambda * I) = o, v \neq o$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ kde λ je vlastní číslo, v je vlastní vektor, poté $det(A - \lambda I) = 0$

Vlastnosti determinantu
λje vlastní číslo matice$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
poté platí $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mathbf{A}}{a}$, kde a $\in \mathbb{R}$

Určování definitnosti

Sylvesterovo pravidlo (podle determinantů)

- Pokud všechny vůdčí hlavní minory jsou kladné tak je matice pozitivně definitní
- Pokud se všechny vůdčí hlavní minory střídají se znaménkem a znaménko začíná na - tak je matice negativně definitní
- Pokud všechny hlavní minory jsou nezáporné tak je matice pozitivně semidefinitní

Podle vlastních čísel

- positivně [negativně] semidefinitní, právě když má všechna vlastní čísla nezáporná [nekladná]
- positivně [negativně] definitní, právě když má všechna vlastní čísla kladná [záporná]
- indefinitní, právě když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.

Spektrální rozklad symetrické matice

- Soustavu rovnic $Av_i = \lambda_i v_i, i = 1, \ldots, n$ lze zapsat maticově jako $AV = V\Lambda$, kde $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), V = [v_1 \ldots v_n]$
- Každou symetrickou matici A lze zapsat jako $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T$, kde matice Λ je diagonální a V je ortogonální (její sloupce jsou vlastní vektory)
- **Choleského rozklad**: Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická. Je-li $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitní, potom existuje dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$.
- Je-li $\mathbf{A}$ pozitivně definitní, je taková matice $\mathbf{L}$ jediná.

Kvadratická forma (homog. polynom f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$f(x) = x^T Ax = x^T(\frac{1}{2}(A + A^T))x$

Definitnost

- A je positivně semidefinitní $\iff \forall x \in \mathbb{R}, x^T Ax \geq 0$
- A je positivně definitní $\iff \forall x \in \mathbb{R}, x^T Ax > 0$
- A je negativně definitní $\iff \forall x \in \mathbb{R}, x^T Ax > 0$
- A je indefinitní $\iff$ existuje $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^T Ax > 0$ a $y^T Ay > 0$

A je neg[semi] def. $\iff$ $-A$ **je poz[semi] def.**

PCA

Umožňuje snížit dimenzionalitu nějaké matice, lze formulovat jako úlohu největší stopu:

- Minimalizuj $\sum_{i=1}^r \|\mathbf{a}_i - \mathbf{X}\mathbf{X}^T \mathbf{a}_i\|^2$ za podmínky $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}$
- Maximalizuj $\sum_{i=1}^r \|\mathbf{X}^T \mathbf{a}_i\|^2$ za podmínky $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}$
- Maximalizuj $\operatorname{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{X})$ za podmínky $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}$

Kuchařka

1. Přepíšeme úlohu na
   $\max\left\{\operatorname{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}\right\}$
2. Najdeme spektrální rozklad $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ při řazení $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ a $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_{k+1} & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$ ($\mathbf{X} = v_1 \ldots v_k$ a $\mathbf{Y} = v_{k+1} \ldots v_n$)
3. Sloupce matice $\mathbf{X}$ tvoří ortonormální bázi hledaného lineárního podprostoru dimenze k
4. Sloupce matice $\mathbf{Y}$ jsou ortonormální bází jeho ortogonálního doplňku dimenze $m - k$
5. Chyba proložení je $\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_m$

Pro k=1
$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$
$\max\left\{\mathbf{x}^T \mathbf{B}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{x}\| = 1\right\} = \lambda_1$
Pro affiní podprostory
Odečteme těžiště od bodů $\overline{\mathbf{a}} = \frac{1}{n}(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n)$.

SVD

Lze také použít na snížení dimenzionality dat. Lze změřit numerický rank.

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = s_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + s_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^T,$$

kde $p = \min\{m, n\}$, diagonální matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ má na diagonále singulární čísla $s_1 \geq \cdots \geq s_p \geq 0$ a matice

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

mají ortonormální sloupce zvané levé/pravé singulární vektory.

Počet nenulových singulárních čísel matice $\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}$, ale spíše se pro malé $\varepsilon > 0$ uvažuje numerický rank

$$\max\{i \mid s_i > \varepsilon\}$$

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r platí $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_r^2}$.
Ortogonální matice má všechna singulární čísla rovna 1

Druhy SVD

Redukované SVD $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times p}$
Plné SVD $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Rank-minimální SVD $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, kde $r := \operatorname{rank} \mathbf{A} \leq p$
Protože $r = \operatorname{rank} \mathbf{S}$, číslo r je počet nenulových singulárních čísel.

Souvislost s vlastními čísly (postup z vlastních čísel do SVD)

Z rank-minimálního SVD matice $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ dostaneme $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}^2\mathbf{U}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T$. To jsou spektrální rozklady se stejnou diagonální maticí $\mathbf{S}^2$.

- Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mají stejná kladná vlastní čísla $\lambda_1 = s_1^2, \ldots, \lambda_r = s_r^2$
- Levé normalizované singulární vektory $\mathbf{u}_i$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$
- Pravé normalizované singulární vektory $\mathbf{v}_j$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

Získání levého vlastního čísla z pravého
$u_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{v_i}$

Nejbližší matice nižší hodnosti (SVD)

Předpokládejme:
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad s_1 \geq \cdots \geq s_p, \quad p = \min(m, n)$
Eckart-young řešení Nechť $k \leq p$. Řešením úlohy

$$\min\{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 \mid \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rank} \mathbf{B} \leq k\}$$

je matice

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{U}\mathbf{S}_k\mathbf{V}^T = s_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + s_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T,$$

kde $\mathbf{S}_k = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_k, 0) \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Kvalita aproximace

Pro $k = 1, \ldots, r-1$ dostaneme

$$\frac{\|\mathbf{A}-\mathbf{B}^*\|}{\|\mathbf{A}\|} = \sqrt{\frac{s_{k+1}^2+\cdots+s_r^2}{s_1^2+\cdots+s_r^2}}$$

Pro $r \le k \le p$ triviálně platí $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}$ a chyba je 0.

PCA pomocí SVD

Předpokládejme: Matice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ve sloupcích datové vektory $\mathbf{a}_i$, předpokládáme $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$. Promítáme je na podprostor dimenze k. **Řešení**

1. Spočti redukované SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, kde $s_1 \ge \cdots \ge s_p$.
2. Označ $\mathbf{X} = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k] \in \mathbb{R}^{m\times k}$.
3. Levé singulární vektory $\mathbf{u}_i$ (vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$) tvoří ortonormální bázi hledaného podprostoru dimenze k.
4. Souřadnice promítnutých bodů jsou sloupce matice $\mathbf{X}^T\mathbf{A}$.
5. Optimální hodnota úlohy (absolutní chyba) je $s_{k+1}^2 + \cdots + s_p^2$.

Lineární programování

Vytvoření duální úlohy

$\min \sum_{j\in J} c_j x_j$	$\max \sum_{i\in I} b_i y_i$
za podmínky	za podmínky
$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}, \quad i \in I_0$
$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \ge b_i$	$y_i \ge 0, \quad i \in I_+$
$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \le b_i$	$y_i \le 0, \quad i \in I_-$
$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{i\in I} a_{ij}y_i = c_j, \quad j \in J_0$
$x_j \ge 0$	$\sum_{i\in I} a_{ij}y_i \le c_j, \quad j \in J_+$
$x_j \le 0$	$\sum_{i\in I} a_{ij}y_i \ge c_j, \quad j \in J_-$

Vlastnosti duální úlohy

primární/duální	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	ano	ne	ne
neomezená	ne	ne	ano
nepřípustná	ne	ano	ano

Věta o komplementaritě

$$\begin{array}{lclcl} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & & \forall i \in I, \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_{i\in I} a_{ij}y_j = c_j & & \forall j \in J. \end{array}$$

Konvexní optimalizace

Minimalizace konvexních funkcí na konvexních množinách.

Kombinace $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$

- Lin: $\alpha_i \in \mathbb{R}$
- Aff: $\sum \alpha_i = 1$
- Nezáp: $\alpha_i \ge 0$ (konvexní kužel)
- Konvex: $\sum \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0$

Pojmy

- Epigraf funkce je množina $\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \le y\}$.
- Subkontura výšky y je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \le y\}$.

Konvexní funkce

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže:
$\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in X, 0 \le \alpha \le 1 \implies f((1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \le (1-\alpha)f(\mathbf{x}) + \alpha f(\mathbf{y})$.

Funkce je konvexní pokud je její epigraf konvexní.

Podmínka 1. řádu

Diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na otevřené konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \implies f(\mathbf{y}) \ge f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

Podmínka 2. řádu

Dvakrát diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na otevřené konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když v každém bodě $\mathbf{x} \in X$ je Hessova matice $f''(\mathbf{x})$ pozitivně semidefinitní.

operace zachovávající konvexitu

- Nechť $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konvexní funkce a nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 0$. Pak funkce $f = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k$ je konvexní.
- Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní. Nechť funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní a neklesající. Pak složená funkce $g \circ f$ (daná předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$) je konvexní.
- Nechť funkce $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{I}$ jsou konvexní. Pak funkce $max_{i\in\mathbb{I}}(f_i(x))$ je konvexní.
- Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ pak $g(x) = f(Ax + b)$ je konvexní

Volné lokální extrémy

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ dvakrát diferencovatelná.

- Jestliže x je lokální minimum [maximum] funkce f, pak platí $f'(x) = 0$ a Hessova matice $f''(x)$ je pozitivně [negativně] semidefinitní.
- Jestliže platí $f'(x) = 0$ a Hessova matice $f''(x)$ je pozitivně [negativně] definitní, pak x je ostré lokální minimum [maximum] funkce f.

Iterační metody

- Iterace: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{v}_k$.
- **Hledání optimálního kroku (parametr α)**
  - $\varphi_k(\alpha) := f(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{v}_k), \mathrm{Min}_{\alpha\in\mathbb{R}}\, \varphi_k(\alpha)$
  - najdeme nulovou derivaci a zvolíme extrém který je kladný (takže pokud vyjdou potenciálně dva extrémy s alpha tak alpha musí být kladné)
- **Gradientní metoda** - jako další krok od počátečního odhadu zvolíme zápornou hodnotu gradientu
  - $\mathbf{v}_k = -f'(\mathbf{x}_k)^T = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$.
- **Newtonova metoda**
  - Původně určená na hledání kořenů. Snaží se najít kořeny Taylorova polynomu funkce. Takže pro minimalizaci musíme pracovat s jacobiho maticí funkce, jinak bychom hledali také kořeny.
  - $\mathbf{v}_k = -f''(\mathbf{x}_k)^{-1} f'(\mathbf{x}_k)^T$ - pro hledání extrémů funkce f
  - doporučuje délku kroku
  - Newtonův směr je sestupný pokud $f' \ne 0$ a f'' je pozitivně definitní
- Pro náhodně zvolený vektor $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vypočteme směrovou derivaci
  - je-li nulová, možná už jsme ve stacionárním bodě;
  - je-li záporná, $\mathbf{v}_k$ je sestupný směr;
  - je-li kladná, $-\mathbf{v}_k$ je sestupný směr.

Nelineární MNČ (ř. soustavy rovnic)

- Mějme soustavu rovnic $g(x) = \mathbf{0}$
- $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Poté nl. MNČ řeší $\mathrm{Min}_{x\in\mathbb{R}}\, f(x)$

Solvery nl. MNČ - pokračování it. metod

- **Gaussova-Newtonova metoda**
  - **Rovnicová** $g(x) = \mathbf{0}$
  - místo hledání minima $\|\mathbf{g}(\mathbf{y})\|^2$ minimalizujeme $\|\mathbf{T}_{1,k}(\mathbf{y})\|^2$,
  - $\mathbf{v}_k = -\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^+ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$
  - Jakobiho matice $g'(x_k)$ musí mít LN sloupce.
  - speciální případ n rovnic o n neznámých $\mathbf{v}_k = -\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$.
  - **Optimalizační** $\mathrm{Min}_{x\in\mathbb{R}}\, g(x)$
  - $\mathbf{v}_k = -(\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^T\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k))^{-1}\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^T\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$
- **Levenbergova-Marquardtova metoda**
  - kombinace gradientní a Gauss-newtonovy metody
  - $v_k = -\left(\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^T\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k) + \mu_k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^T\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$
  - čím více μ tím více adidas (gradientní metoda), kompletně GN pro $\mu = 0$
  - zvolíme nějakou konstantu $q > 1$ např. 2 a začneme s nějakou velkou hodnotou μ_0. Pokud se účelová funkce sníží další krok bude $\mu_{k+1} = u_k/q$. Pokud se zvýší $\mu_{k+1} = u_k q$

Vázané extrémy

- **Pojmy**
  - regulární bod - bod $x \in \mathbb{R}$ zobrazení $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pokud je zobrazení v bodě spojitě diferenciovatelné a Jacobiho matice má LN řádky
- $\lambda_L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T\mathbf{g}(\mathbf{x})$
- **Podmínka prvního řádu**
  - Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné v *regulárním bodě* $\mathbf{x}$ zobrazení $\mathbf{g}$. Jestliže $\mathbf{x}$ je lokální extrém funkce f za podmínky $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_m$, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}^m$, splňující $\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \lambda^T\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_n$,
- **Podmínka druhého řádu**

  $\lambda L''(x)$ je pozitivně definitní na null $g'(x)$

  $\Downarrow$

  x je vázané minimum f

  $\Downarrow$

  $\lambda L''(x)$ je pozitivně semidefinitní na null $g'(x)$

Hashmapa na úlohy

- Najít singulární čísla matice $\to$ Souvislost s vlastními čísly (postup z vlastních čísel do SVD)
- Najděte kolmé projekce vektoru x na
  - $span\{v\}, v \in \mathbb{R}^n$ Ortogonální projektory - matice má jeden řádek
  - $rng(A)$, kde $def(\mathbf{A}) \ne \mathbf{0}$ potom udělej projekci na $null(A)$ a referuj na sekci Ortogonální projektory pro získání projektoru na ortogonální doplněk. (nebo pokud se to nevyplatí tak udělej z A něco co má stejný range ale LN sloupce)
  - $null(A)$ to získáš rovnicí $Ax = \mathbf{0}$
  - $span\{\mathbf{A}^T\}$ potom udělej zase projekci na $null(\mathbf{A}^T)$ stejně jako předtím
- najděte globální extrémy funkce (nelineární) s více než 1 podmínkou
  - pokud má vnitřek najdi volné extrémy
  - najdi extrémy pro všechny různé podmínky stejně jako kdyby funkce měla jen jednu podmínku a vyber jen výsledky splňující všechny podmínky
  - Vypočítej průnik všech množin a zkus jestli není extrém na každém průniku
- Najdi extrémy na uzavřené množině
  - Použij lagrange a nezapomeň na podmínku druhého řádu (nedělej podle lambda hessian to tě nezajímá)
- Proložit kružnici pomocí nejmenších čtverců
  - Minimalizuj $g(x_i, y_i) = \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2} - r$
- Máme množinu $X = \{(x, y, z) \mid x = t, y = 2t, z = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}\}$.
  - Je to affiní podprostor (s offsetem (0,0,1)) musíš najít $null(A)$ a potom dostadit offset do matice $null(A)$ a získat výsledek b. Nakonec dopadneš s něčím ve zadaném formátu
  - vzdálenost přímky od bodu. Na to je vzoreček (vzdálenost bodu od roviny), také lze nejdřív od bodu odečíst offset (0,0,1) a potom spočítat projektor na ortogonální prostor X.
- Jsou dány dvě mimoběžky v $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, každá je zadána bodem, kterým prochází, a směrovým vektorem. Najděte jejich vzdálenost metodou nejmenších čtverců.
  - (a) Nechť jsou přímky popsány jako $\{\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \mid t_1 \in \mathbb{R}\}$ a $\{\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \mid t_2 \in \mathbb{R}\}$. Hledá se minimum $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ za podmínek, že $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2$. Řešíme přeurečenou soustavu s n rovnicemi a dvěma proměnnými t_1, t_2: $\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2$. Soustavu lze zapsat maticově

$$\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & -\mathbf{s}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix} = [\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1].$$

Soustavu normálních rovnic dostaneme po vynásobení maticí

$$\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T\\ -\mathbf{s}_2^T\end{bmatrix} zleva:$$

$$\begin{bmatrix}\|\mathbf{s}_1\|^2 & -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2\\ -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2 & \|\mathbf{s}_2\|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\\ -\mathbf{s}_2^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\end{bmatrix}.$$