MATOUMA7

Na nasledujicich radcich naleznete hodnoceni jednotlivych prikladu, kontakt na opravujiciho a jeho pripadny komentar.

1. 2b (voracva1@fel.cvut.cz)

   Super, jen bych radsi videl aplikovanou transpozici
2. 0b - neodevzdal
3. 3b (spetlrad@fel.cvut.cz)
4. 3b (cechj@fel.cvut.cz)
5. 3b (petr@olsak.net)
6. 3b (petr@olsak.net)

celkem 14b

Jméno	Příjmení	Už. jméno
Matyáš	**Matouš**	**matouma7**

Řešení testu pište perem na papír (tedy ne do počítače), dovoleno je také psát elektronickým perem na tablet. Zadání příkladů nemusíte opisovat. Každý příklad pište na zvláštní stránku. Na každou stránku napište nahoru číslo příkladu a podpříklady uvoďte příslušným písmenem v kroužku.

Do řešení pište nejen odpovědi ale i jejich odůvodnění a postupy řešení. Správná odpověď bez odůvodnění je neplatná!

Na konci testu vaše řešení oscanujte nebo ofoťte a nahrajte do Brute do úlohy Test2. Každý příklad odevzdejte ve zvláštním souboru, jehož jméno bude číslo příkladu. Dovolené formáty jsou PDF a ZIP, přičemž v ZIPu může být jakýkoliv formát (JPG, PNG, PDF). Tedy celkem odevzdáte buď šest souborů 1.pdf, 2.pdf, ..., 6.pdf, nebo jeden ZIP ve kterém budou např. 1.jpg, 2.jpg, ..., 6.jpg. Do Brute můžete nahrávat opakovaně, ovšem bere se v úvahu vždy jen poslední verze (dřívější verze se těmi pozdějšími přemažou).

Odevzdávání dokončete do 17:45. Ovšem Brute zůstane otevřené až do 18:00 pro případ, že by někdo měl technické problémy. Odevzdání (např. emailem) po tomto termínu není možné. Velmi proto doporučujeme dostatečnou dobu před koncem nahrát aspoň nějakou verzi řešení, pak ještě počítat, a na konci nahrát znovu vylepšenou verzi řešení.

Během testu můžete používat materiály k předmětu (skripta, slajdy, Vaše zápisky), nesmíte ale s nikým komunikovat. Prosíme, nezneužívejte situace a nepodvádějte. Při pochybostech můžeme studenta z příkladu ústně vyzkoušet. Při odhaleném podvodu předmět pro studenta okamžitě končí.

Otázka 1

Napište vzorec pro gradient funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je symetrická a $\mathbf{g}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je dané zobrazení. (Vzorec bude samozřejmě obsahovat derivaci zobrazení $\mathbf{g}$.)

Otázka 2

Řešíme rovnici $\cos x = x$ Newtonovou metodou.

1. Napište iteraci algoritmu.
2. Pro počáteční odhad $x_0 = 0$ vypočítejte odhad řešení x_1 po jedné iteraci metody.

Otázka 3

Je dáno n trojic (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$ (kde $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$). Hledáme rovinu s rovnicí $ax + by + cz = 0$ (kde $a, b, c \in \mathbb{R}$) takovou, aby součet druhých mocnin (kolmých) vzdáleností bodů od roviny byl co nejmenší.

1. Zformulujte tuto optimalizační úlohu matematicky (musí být jasně vidět, co jsou proměnné, účelová funkce a omezení).
2. Napište algoritmus (pseudokód) na výpočet parametrů a, b, c. Algoritmus musí být jasně a jendoznačně formulován jako posloupnost kroků napsaných pod sebou.

Otázka 4

Máme funkci $f(x, y, z) = xyz$ a bod $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

1. Najděte první derivaci (Jacobiho matici) funkce.
2. Najděte druhou derivaci (Hessovu matici) funkce.
3. Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledný polynom zjednodušte.
4. Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce v bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledný polynom zjednodušte.

Otázka 5

Minimalizujeme funkci $\mathbf{a}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{y} = 1$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou dané vektory, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je daná symetrická regulární matice a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou proměnné. Najděte všechny body $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ podezřelé z lokálního extrému (výsledkem bude vždy vzorec pro $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Použijte metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Otázka 6

Máme funkci $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - xy$.

1. Najděte všechny stacionární body funkce.
2. Pro každý stacionární bod určete, zda je to lokální extrém a případně jakého typu.

~~4) F(x) = (~~

(1) $F(\vec{x}) = g(\vec{x})^T A g(\vec{x})$ =

$F(\vec{x})' = g(\vec{x})^T \cdot (A g(\vec{x}))' + (A g(\vec{x}))^T \cdot g'(\vec{x}) =$

$= g(\vec{x})^T \cdot A g'(x) + g(\vec{x})^T \cdot A^T \cdot g'(\vec{x}) =$

$= g(\vec{x})^T \cdot A \cdot g'(\vec{x}) + g(\vec{x})^T \cdot A \cdot g'(\vec{x}) = 2 \cdot g(\vec{x})^T A \cdot g'(\vec{x})$

$\nabla F(\vec{x}) = f'(\vec{x})^T = 2(\vec{g}^T(x)^T A g'(x))^T$

3) Newtonova metoda

~~$x = x - (g'(a))^{-1} g(a)$~~

$g(x) = \cos x - x$

$g'(x) = -\sin(x) - 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{\cos x - x_k}{-\sin(x_k) - 1}$$

$$x_1 = 0 - \frac{\cos(0) - 0}{-\sin(0) - 1} = 1$$

✓

3 5

(4) $f(x,y,z) = xyz$

a) $f'(x,y,z) = [yz,\ xz,\ xy] \xrightarrow{(0,0,1)} [0,0,0]$ ✓ 3

b) $f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}_{(0,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

c) $T_1(x_0,y_0,z_0) = f(0,0,1) + f'(0,0,1) \cdot \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 + [0,0,0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} =$

$= 0$ ✓

d) $T_2 = T_1 + [x, y, z-1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} : 2 =$

$= [x, y, z-1] \cdot 0 + \frac{[xy\ z-1] \begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}}{2} = 0 + \frac{2xy}{2} = xy = 0$ ✓

7

$f(x,y) = a^T x + b^T y$

3b

$L(x,y,\lambda) = a^T x + b^T y - \lambda(x^T C y - 1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = a^T - \lambda y^T C^T = 0 \Rightarrow a = \lambda C y$

$\frac{\partial L}{\partial y} = b^T - \lambda x^T C = 0 \Rightarrow b = \lambda C^T x = \lambda C x$

$y = \frac{1}{\lambda} C^{-1} a$

$x = \frac{1}{\lambda} C^{-1} b$

$x^T C y = \frac{1}{\lambda^2} b^T C^{-1} C C^{-1} a = 1$

$\frac{1}{\lambda^2} b^T C^{-1} a = 1 \quad \lambda = \sqrt{b^T C^{-1} a}$

$x = \frac{C^{-1} b}{\sqrt{b^T C^{-1} a}}$

$y = \frac{C^{-1} a}{\sqrt{b^T C^{-1} a}}$

6) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - xy$

3 b

a)

$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{2x}{2} - y = x - y = 0$

$x = y$

$\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{3y^2}{3} - x = y^2 - x = 0 \quad y^2 = x$

$y^2 - y = 0$

$y \cdot (y-1) = 0$

$y = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

dva stac. body $(0,0)$ $(1,1)$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2y$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -1$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

jedno číslo negativní, jedno pozitivní } jsi indefinitní

bod $(0,0)$ není lok. extrém

$H(1,1) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\rightarrow (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1 =$

$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 =$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 1$

$D = 9 - 4$

$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

obě vlastní čísla jsou kladná

matice je pozitivně definitní

bod $(1,1)$ je ostrá lok. minima