

Následující příklady číslo 1–3 vyřešte a řešení napište do připravených mezer (postupy psát nemusíte).

2. (2 body) Na experimentálním zařízení jste naměřili souřadnice n bodů v prostoru $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$. Chcete těmito body proložit přímku (která nemusí procházet počátkem) tak, aby součet druhých mocnin vzdáleností bodů ke přímce byl minimální. Napište algoritmus (pseudokód), který tento přímku najde. Výsledná přímka bude množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$, tj. výstupem algoritmu budou vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

*Mozdí se zeze [n, ~] = size(X);
avr = [~];
for i = 1:n
avr(i+1) = X(i,:);
end
avr = avr * 1/n;
avr_m = [avr'; avr'; avr'];
X_poc = X - avr_m;*

*předpoklad → naup je matice X velikosti [n, 3]
matice X má všechny matici Invariantní vlastnosti
velikostí [n, 3]
přesněji vektor
span {v1, v2, v3} + je ta přímka*

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(:, 3)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{avr}$$

BESTA VYKONALO VSE

2. Máme funkci $f(x, y) = x/y$ a bod $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

- a) (1 bod) Najděte první derivaci (Jacobiho matici) funkce f .

$$\left(\frac{1}{y} \mathbf{i} - \frac{x}{y^2} \mathbf{j} \right)$$

- b) (1 bod) Najděte druhou derivaci (Hessovu matici) funkce f .

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

- c) (1 bod) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě (x_0, y_0) . (Polynom upravte tak, že vynásobíte matici a vektory a zjednodušíte, tj. ve výsledku se nebudou vyskytovat matice a vektory ale pouze skaláry.)

$$T^1(-1, 1) = -1 + x + y$$

- d) (1 bod) Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě (x_0, y_0) . (Polynom podobně upravte.)

$$T_2(-1, 1) = -1 + 0xy + 0x^2 + 0y^2 - 2xy - 2y^2 = 2x + 2y - xy - y^2 - 1$$

3. (2 body) Zemědělec má 10 ha pole na výsadbu obilí a chce osázenet nejméně 7 ha. Má k dispozici 120 tis. Kč a celou výsadbu chce stihnout za ne více než 12 hodin. Na výsadbu má dva druhy obilí, pšenici a žito. Osázení 1 ha pšenice stojí 20 tis. Kč a trvá jednu hodinu. Osázení 1 ha žita stojí 15 tis. Kč a trvá dvě hodiny. Za prodej pšenice z 1 ha se utrží 60 tis. Kč, za prodej žita z 1 ha se utrží 40 tis. Kč. Kolik pšenice a žita má zemědělec vysázenet, aby měl co největší zisk (tj. rozdíl mezi tržbou a náklady na výsadbu)? Úlohu napište jako lineární program (který ale neřešte).

$$\begin{array}{l} \text{počet hektarů pšenice} = p \\ \text{počet hektarů žita} = z \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{max} & 60p + 40z \quad \text{funkce cílová} \\ \text{s.t.} & p + z \leq 10 \\ & p + z \geq 7 \\ & 20p + 15z \leq 120 \\ & 1p + 2z \leq 12 \\ & p, z \geq 0 \end{array}$$

V každém z následujících příkladů (na druhé straně) je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky (dole na této straně) křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY!

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď minus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

	4	5	6	7	8	9	10
a							
b				X			
c						X	
d	X	X	X				
e	X	X			X		X

$$4 - \frac{2}{4}$$

4. Úloha $\min\{2x + y \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq 1, y \geq 0\}$

- (a) má dvě optimální řešení
- (b) je neomezená
- (c) je nepřípustná
- (d) má nekonečně mnoho optimálních řešení
- (e) má jedno optimální řešení

5. Pro dané $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^n$ a $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ hledáme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ minimalizující funkci $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i |\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1|$. Tato úloha

- (a) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{\sum_{i=1}^m a_i z_i \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, -z_i \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1 \leq z_i \forall i\}$
- (b) je lineární program
- (c) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{z \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, -z \leq a_i (\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1) \leq z \forall i\}$, jestliže $a_1, \dots, a_m \geq 0$
- (d) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{z \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, -a_i z \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1 \leq a_i z \forall i\}$
- (e) žádná z uvedených možností

6. Máme funkce $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dané vzorce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - 1$ (kde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) a $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 - 1$ (kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu).

Je-li \mathbf{x}^* lokální maximum funkce f za podmínky $g(\mathbf{x}) = 0$, pak

- (a) $\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{c}$ pro nějaké $\alpha > 0$
- (b) $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- (c) $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- (d) vektory $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ a $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ jsou ortogonální
- (e) žádná z uvedených možností

7. Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Optimální hodnota lineárního programu $\max\{ \mathbf{a}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^T \mathbf{x} \leq 1\}$ je rovna

- (a) $\max_{i=1}^n \min\{a_i, 0\}$
- (b) $\max\{0, \max_{i=1}^n a_i\}$
- (c) $\max_{i=1}^n |a_i|$
- (d) $\sum_{i=1}^n \min\{a_i, 0\}$
- (e) žádná z uvedených možností

8. Máme funkci $f(x) = x \ln x - 1$ (kde \ln značí přirozený logaritmus) a hledáme $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Chceme použít numerickou iterační metodu, z nějakého počátečního bodu x_0 blízko řešení. Jaká iterace je k tomu nevhodnější?

- (a) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(1 + \ln x_k)$, kde posloupnost $\alpha_k > 0$ konverguje k nule
- (b) $x_{k+1} = (x_k + 1)/(\ln x_k + 1)$
- (c) $x_{k+1} = x_k - (x_k \ln x_k - 1)/(\ln x_k + 1)$
- (d) $x_{k+1} = -x_k \ln x_k$
- (e) žádná z uvedených iterací není vhodná

↳ chyba Gauss Newtonova

9. Nechť $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$. Množina $\operatorname{argmin}_{(x,y) \in K} (x^2 + y^2)$ je

- (a) $\{(\pm 1/4, \pm 1/4)\}$
- (b) $\{(1, 0), (-1, 0)\}$
- (c) $\{(0, -1/2), (0, 1/2)\}$
- (d) $\{(0, 0)\}$
- (e) žádná z uvedených možností

10. Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn právě tehdy, když je

- (a) průnikem konečně mnoha konvexních množin
- (b) konvexním obalem svých extremálních bodů
- (c) konvexním obalem konečně mnoha bodů
- (d) množinou řešení soustavy konečně mnoha lineárních nerovností tvaru $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ (tj. typu 'menší nebo rovno')
- (e) žádná z uvedených možností