

Následující příklady číslo 1-3 vyřešte a řešení napište do připravených mezer (postupy psát nemusíte).

1. (2 body) Na experimentálním zařízení jste naměřili souřadnice n bodů v prostoru $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^3$. Chcete těmito body proložit přímkou (která nemusí procházet počátkem) tak, aby součet druhých mocnin vzdáleností bodů ke přímce byl minimální. Napište algoritmus (pseudokód), který tuto přímku najde. Výsledná přímka bude množina $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$, tj. výstupem algoritmu budou vektory $a, b \in \mathbb{R}^3$.

$x_1 = x_1 - a$ $a = ?$

$A = [x_1 \dots x_n]$

$x_n = x_n - a$ $a = ?$

$[D, V] = \text{eig}(A A^T)$

$b = (V_1, \text{end})$

3,5 2. Máme funkci $f(x, y, z) = xyz$ a bod $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

a) (1 bod) Najděte první derivaci (Jacobihovu matici) funkce f .

$f'(x, y, z) = [yz, xz, xy]$ $= [0, 0, 0]$ $0?$

b) (1 bod) Najděte druhou derivaci (Hessovu matici) funkce f .

$\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} & \frac{d^2 f}{dx dy} & \frac{d^2 f}{dx dz} \\ \frac{d^2 f}{dy dx} & \frac{d^2 f}{dy^2} & \frac{d^2 f}{dy dz} \\ \frac{d^2 f}{dz dx} & \frac{d^2 f}{dz dy} & \frac{d^2 f}{dz^2} \end{bmatrix}$

c) (1 bod) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě (x_0, y_0) . (Polynom upravte tak, že vynásobíte matice a vektory a zjednodušíte, tj. ve výsledku se nebudou vyskytovat matice a vektory ale pouze skaláry.)

$T_1(x_0, y_0, z_0) = T_{(0,0,1)} + f'(0,0,1) \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 + [0, 0, 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = 0$

d) (1 bod) Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě (x_0, y_0) . (Polynom podobně upravte.)

$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + \frac{2xy}{2} = xy$

3. (2 body) Zemědělec má 10 ha pole na výsadbu obilí a chce osázet nejméně 7 ha. Má k dispozici 120 tis. Kč a celou výsadbu chce stihnout za ne více než 12 hodin. Na výsadbu má dva druhy obilí, pšenici a žito. Osázení 1 ha pšenice stojí 20 tis. Kč a trvá jednu hodinu. Osázení 1 ha žita stojí 10 tis. Kč a trvá dvě hodiny. Za prodej pšenice z 1 ha se utrží 50 tis. Kč, za prodej žita z 1 ha se utrží 30 tis. Kč. Kolik pšenice a žita má zemědělec vysázet, aby měl co největší zisk (tj. rozdíl mezi tržbou a náklady na výsadbu)? Úlohu napište jako lineární program (který ale neřešte).

		x	z	
P	1	20	10	$50 \ 000$
Z	1	10	2	$30 \ 000$

$\min 10 \leq x \leq 7$ $10 \geq x + 2z \geq 7$

$P \ 50000P + 30000Z$

$L \ 20 \ 000 P + 10000Z \leq 120 \ 000$

$P + 2Z \leq 12$

$P + Z \geq 10$

$P, Z \geq 0$

$10 \geq P + Z \geq 7$

V každém z následujících příkladů (na druhé straně) je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky (dole na této straně) křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou. ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY!

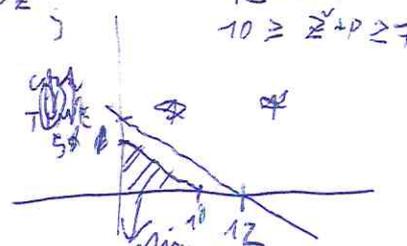
(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď minus čtyř bodů, za chybějící odpověď 0 bodů.)

$S = 50P + 30Z - 20P - 10Z = 30P + 20Z$

$12 \geq 2P + Z$

$10 \geq P + Z$

	4	5	6	7	8	9	10
a							X
b	X	X			X		
c							
d			X	X		X	
e							



4. Úloha $\min\{2x + y \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq 1, y \geq 0\}$

- (a) má nekonečně mnoho optimálních řešení
- (b) má jedno optimální řešení
- (c) je nepřipustná
- (d) je neomezená
- (e) má dvě optimální řešení

5. Máme funkci $f(x) = x \ln x - 1$ (kde \ln značí přirozený logaritmus) a hledáme $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Chceme použít numerickou iterační metodu, z nějakého počátečního bodu x_0 blízko řešení. Jaká iterace je k tomu nejvhodnější?

- (a) $x_{k+1} = (x_k + 1)/(\ln x_k + 1)$
- (b) $x_{k+1} = x_k + (x_k \ln x_k - 1)/(\ln x_k + 1)$
- (c) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(1 + \ln x_k)$, kde posloupnost $\alpha_k > 0$ konverguje k nule
- (d) $x_{k+1} = -x_k \ln x_k$
- (e) žádná z uvedených iterací není vhodná

6. Pro dané $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^n$ a $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ hledáme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ minimalizující funkci $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m a_i |\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1|$. Tato úloha

- (a) je lineární program
- (b) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{z \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, -z \leq a_i(\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1) \leq z \forall i\}$, jestliže $a_1, \dots, a_m \geq 0$
- (c) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{z \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, -a_i z \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1 \leq a_i z \forall i\}$
- (d) je ekvivalentní lineárnímu programu $\min\{\sum_{i=1}^m a_i z_i \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, -z_i \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + 1 \leq z_i \forall i\}$
- (e) žádná z uvedených možností

7. Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn právě tehdy, když je

- (a) konvexním obalem svých extrémálních bodů
- (b) konvexním obalem konečně mnoha bodů
- (c) průnikem konečně mnoha konvexních množin
- (d) množinou řešení soustavy konečně mnoha lineárních nerovností tvaru $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ (tj. typu 'menší nebo rovno')
- (e) žádná z uvedených možností

8. Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Optimální hodnota lineárního programu $\max\{\mathbf{a}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^T \mathbf{x} \leq 1\}$ je rovna

- (a) $\max_{i=1}^n \min\{a_i, 0\}$
- (b) $\max\{0, \max_{i=1}^n a_i\}$
- (c) $\max_{i=1}^n |a_i|$
- (d) $\sum_{i=1}^n \min\{a_i, 0\}$
- (e) žádná z uvedených možností

9. Nechť $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$. Množina $\operatorname{argmin}_{(x,y) \in K} (x^2 + y^2)$ je

- (a) $\{(\pm 1/4, \pm 1/4)\}$
- (b) $\{(0, 0)\}$
- (c) $\{(1, 0), (-1, 0)\}$
- (d) $\{(0, -1/2), (0, 1/2)\}$
- (e) žádná z uvedených možností

10. Máme funkce $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dané vzorci $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - 1$ (kde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) a $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 - 1$ (kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu). Je-li \mathbf{x}^* lokální maximum funkce f za podmínky $g(\mathbf{x}) = 0$, pak

- (a) $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- (b) $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- (c) vektory $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ a $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ jsou ortogonální
- (d) $\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{c}$ pro nějaké $\alpha > 0$
- (e) žádná z uvedených možností