

Příklady na této stránce vyřešte nejprve nanečisto na svůj pomocný papír (který neodevzdáte) a pak odpověď napište načisto do připravené mezery. Postup psát nemusíte.

1. Máme funkci $f(x, y) = x/(y - x)$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

- a) (2 body) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě (x_0, y_0) . Výsledný polynom zjednodušte (rozhodně ho nenechte v maticové formě).

$$T_1(x, y) = x \quad T_1(x, y) = x$$

- b) (2 body) Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce v bodě (x_0, y_0) . Výsledný polynom opět zjednodušte.

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + x^2 - xy + x = x^2 - xy + 2x$$

2. Je dán n trojic $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$. Napište postup (algoritmus), jak najít čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ minimalizující součet součet čtverců (kolmých) vzdáleností bodů od množiny $\text{Pro oba je stejný začátek. Trojicím říkáme body } \vec{a}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \text{ dané takto do sloupců.}$

- a) (2 body) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ je první sloupec matice } V$$

$\text{body } \vec{a}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \text{ dané takto do sloupců. Tyto body naskládáme vedle sebe do matice } A \in \mathbb{R}^{3 \times n} \text{ a provedeme}$

- b) (2 body) $\{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ je poslední sloupec matice } V$$

$$[D, V] = \text{eig}(A A^T)$$

vlastní vektory

čísla

je řazené od nejmenší po největší

3. (3 body) Hledáme přibližné řešení soustavy $x^2 + 2y^2 = 1$, $xy = 2$, $x = y$ ve smyslu nejmenších čtverců. Napište iteraci Gaussovy-Newtonovy metody.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot v_k \quad v_k = -g'(x_k)^+ g(x_k) \quad g'(x_k) = \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$-g'(x_k)^+ = (g'(x_k)^T g'(x_k))^{-1} g'(x_k)$$

4. (3 body) V továrně se vyrábějí dva typy kravat, typ "Miloš Zeman" a typ "Václav Klaus". Zisk z výroby jedné kravaty typu Klaus je 400 Kč, zisk z jedné kravaty typu Zeman je 300 Kč. Jedna kravata Klaus vyžaduje dvakrát delší čas výroby než kravata Zeman. Na každou kravatu je třeba stejně množství tkaniny. Kdyby se vyráběly pouze kravaty Zeman, rychlosť strojů by stačila na 1000 kravat za den, množství tkaniny však stačí jen na 800 kravat denně. Kravata Klaus obsahuje luxusní sponu, které je k dispozici jen 300 kusů denně. Na kravatu Zeman stačí obyčejná spona, které je k dispozici 700 kusů denně. Chceme zjistit, kolik kterých kravat se má denně vyrobit, aby byl zisk maximální. Ceny surovin nepočítáme (jsou nasmlouvány předem). Formulujte jako lineární program.

$$\max 300z + 400k$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 300 \\ 400 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

} kladná získá
} růstka
} spona 1
} spona 2
} rychlosť strojů

V každém z následujících kvízových příkladů (na druhé straně) je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

✓
✓

4

3

$g(x) = ?$

1. Máme funkci $f(x, y) = x/(y - x)$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

a) (2 body) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce v bodě (x_0, y_0) . Výsledný polynom zjednodušte (rozhodně ho nenechte v maticové formě).

$$T_1(x, y) = x \quad T_1(x, y) = x$$

b) (2 body) Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce v bodě (x_0, y_0) . Výsledný polynom opět zjednodušte.

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + x^2 - xy + x = x^2 - xy + 2x$$

2. Je dánou n trojice $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$. Napište postup (algoritmus), jak najít čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ minimalizující součet součet čtverců (kolmých) vzdáleností bodů od množiny $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

a) (2 body) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ body $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$ dané takto do sloupců.

$\checkmark \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ je první sloupec maticy ✓ Tyto body musíme dále vedené sebe do matice A $A \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ Provedeme

b) (2 body) $\{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\checkmark \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ je poslední sloupec maticy ✓ V něm poslední sloupec maticy V.

3. (3 body) Hledáme přibližné řešení soustavy $x^2 + 2y^2 = 1$, $xy = 2$, $x = y$ ve smyslu nejmenších čtverců. Napište iteraci Gaussovy-Newtonovy metody.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \alpha_k \cdot V_k \\ \alpha_k \cdot V_k & \quad \quad \quad V_k = -g'(x_k)^+ g(x_k) \\ & \quad \quad \quad -g'(x_k)^+ = -(g^T(x_k) g'(x_k))^{-1} g^T(x_k) \\ & \quad \quad \quad g'(x_k) = \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ y & x \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. (3 body) V továrně se vyrábějí dva typy kravat, typ "Miloš Zeman" a typ "Václav Klaus". Zisk z výroby jedné kravaty typu Klaus je 400 Kč, zisk z jedné kravaty typu Zeman je 300 Kč. Jedna kravata Klaus vyžaduje dvakrát delší čas výroby než kravata Zeman. Na každou kravatu je třeba stejně množství tkaniny. Kdyby se vyráběly pouze kravaty Zeman, rychlosť strojů by stačila na 1000 kravat za den, množství tkaniny však stačí jen na 800 kravat denně. Kravata Klaus obsahuje luxusní sponu, které je k dispozici jen 300 kusů denně. Na kravatu Zeman stačí obyčejná spona, které je k dispozici 700 kusů denně. Chceme zjistit, kolik kterých kravat se má denně vyrobit, aby byl zisk maximální. Ceny surovin nepočítáme (jsou nasmlouvány předem). Formulujte jako lineární program.

$$\max 300z + 400k$$

OK, ale pořád to je nezáplňeno
možného bez ustic?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 300 \\ 400 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Wazební čísla
- růžka
- spona K
- spona Z
- rychlosť strojů

V každém z následujících kvízových příkladů (na druhé straně) je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, poličko s křížkem zcela zaplete modrou barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za správnou odpověď jsou 2 body, za chybnou odpověď minus půl bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

123



	1	2	3	4	5	6	7	8
a			X	X				X
b	X							
c				X				
d	X	X			X	X		

Vaše odpovedi na kvízové otázky: d, b, d, a, a, d, d, a

spatne: 2, 4

dobre: 1, 3, 5, 6, 7, 8

chybi:

Celkem bodu za kviz: 11.0

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

1. Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x} + 1} - 1$
- (a) je vektorová norma
 - (b) je norma, ale ne vektorová
 - (c) je vektorová norma pouze pro $n = 1$
 - (d) není vektorová norma
 - (e) žádná z uvedených možností
2. Máme funkci $f(x, y) = (5 + x - 2y)e^{y^2-x}$.
- (a) Hessián funkce má dvě vlastní čísla s opačnými znaménky.
 - (b) Funkce má jediný stacionární bod, který je lokální minimum.
 - (c) Funkce má dva stacionární body, oba jsou sedlové body.
 - (d) Funkce nemá žádný stacionární bod.
 - (e) žádná z uvedených možností
3. Úloha $\max\{ \mathbf{b}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$
- (a) má vždy optimální řešení
 - (b) je vždy neomezená
 - (c) nemusí být přípustná
 - (d) je vždy přípustná, ale nemusí mít optimální řešení
 - (e) žádná z uvedených možností
4. Chcete spočítat aproximaci čísla $2^{1/3}$ s co největší přesnosti. Použít smíte algoritmus, který používá jen aritmetické operace $+, -, \times, /$. Algoritmus smí celkově vykonat ne více než 100 aritmetických operací. Jaký je nevhodnější algoritmus?
- (a) Iterační metoda s iterací $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)$ kde $f(x) = x^3 - 2$.
 - (b) Iterační metoda s iterací $x_{k+1} = \frac{2}{3}(x_k + 1/x_k^2)$.
 - (c) Metoda půlení intervalu.
 - (d) Gradientní metoda s optimální délkou kroku (exact line search).
 - (e) Gradientní metoda s přibližnou délkou kroku (inexact line search).
5. Úloha $\max\{ \mathbf{1}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \leq 1 \}$
- (a) není lineární program, ale lze ji na lineární program převést
 - (b) má vždy triviální optimální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
 - (c) je lineární program s nekonečnou (i když spočetnou) množinou lineárních omezení
 - (d) není lineární program a nelze ji na lineární program převést
 - (e) žádná z uvedených možností
6. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Gradient funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{y} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ je
- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ (je-li \mathbf{A} symetrická, tak $\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\mathbf{A}$)
 - (b) $\mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b} + 2(\mathbf{x} - \mathbf{y})$
 - (c) $\mathbf{y}^T \mathbf{A} + \mathbf{b}^T + (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$
 - (d) $\mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{b} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$
 - (e) žádná z uvedených možností
7. Množina $\{ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq y \}$
- (a) je konvexní, ale není to konvexní mnohostěn
 - (b) není konvexní
 - (c) je omezený konvexní mnohostěn
 - (d) je neomezený konvexní mnohostěn
 - (e) žádná z uvedených možností
8. Hledáme extrémy funkce $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je neznámá a $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ je dáno.