OPT midterm 26.5.2023 | Příjmení: Jméno: | 000

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 b) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (2, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ od nadroviny $\{\mathbf{x};\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} = (3, 1, 0, 2)$, $b = 2$.

   Můžeme využít např. známého vzorce $\frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(3,1,0,2)(2,-1,0,0) - 2|}{\|(3,1,0,2)\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

3. Máme 5 pozorování $(0, 1), (1, 1), (\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 3), (2, 4)$ tvaru (x_i, y_i). Hledáme regresní funkci $y = \theta_1 x^2 + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry.

   a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
   b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

   jejíž jediné řešení je $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$.

4. Řádky matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1000 \times 9}$ reprezentují filmy a sloupce diváky, složky matice $\mathbf{A}$ jsou čísla 0 nebo 1 podle toho, zda daný divák shlédl daný film.

   a) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$?
   b) (1 b) Jakou interpretaci mají složky matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$?
   c) (1.5 b) Pro matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ hledáme nejbližší matici hodnosti ≤ 4. Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište (obecně) hodnotu účelové funkce v optimu.
   d) (1.5 b) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, pokud víte, že matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má alespoň 5 nulových vlastních čísel?

   a) Počet filmů, které viděl divák i a j. b) Počet diváků, kteří viděli filmy i a j. c) Minimalizujeme $\|\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$ za podmínek $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ a rank $\mathbf{B} \leq 4$. V optimu pro matici $\mathbf{B}^*$ platí

$$\|\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{B}^*\|^2 = s_5^2 + \ldots + s_9^2 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_5$$

   kde $s_1 \geq \ldots \geq s_9$ jsou singulární čísla matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ a $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_9$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. d) $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$

OPT midterm 26.5.2023 | Příjmení: Jméno: | 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

ODPOVĚĎ (a) JE VŽDY SPRÁVNÁ.

1. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice taková, že rank $\mathbf{A} = n < m$. Matice $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (a) je singulární
   (b) je regulární
   (c) je ortogonální
   (d) je negativně definitní
ll (e) nemusí existovat

2. Máme zadánu pozitivně definitní symetrickou matici $\mathbf{A}$ řádu n. Platí:
   (a) $\min\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} = \lambda$, kde λ je nejmenší vlastní číslo matice $\mathbf{A}$.
   (b) Nic z uvedeného.
   (c) Optimální řešení úlohy $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
   (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ může nabývat záporných hodnot.
   (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ je řešením úlohy $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

3. Máme ortogonální matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Označme $\mathbf{y} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k\mathbf{x}$. Platí:
   (a) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$.
   (b) Vektor $\mathbf{y}$ je nulový.
   (c) Vektory $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$ jsou kolmé.
   (d) $\|\mathbf{y}\| = 1$.
ll (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

4. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je jednotkový vektor. Ortogonální projektor na podprostor $\text{span}\{\mathbf{a}\}$
   (a) je matice $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$
   (b) neexistuje
   (c) je matice plné hodnosti
   (d) je symetrická regulární matice
ll (e) je matice s alespoň jedním nereálným vlastním číslem

5. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$, kde $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, platí:
   (a) Optimální řešení je $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.
   (b) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
   (c) Hodnota v optimu je vždy 0.
   (d) Úloha nemusí mít optimální řešení.
   (e) Nic z uvedeného.