OPT test 19.12.2023 | Příjmení: Jméno:

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery. Postup psát NEMUSíTE. Odevzdává se POUZE TENTO ČISTOPIS.

1. Napište (totální) derivace těchto funkcí/zobrazení:

   a) (1 bod) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ (kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu)

   Řetízkovým pravidlem. Známe (nebo odvodíme) $(\|\mathbf{y}\|)' = \mathbf{y}^T/\|\mathbf{y}\|$ a $(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})' = \mathbf{A}$. Tedy $f'(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|}$.

   b) (1 bod) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$, kde $\mathbf{y}$ je daný konstantní vektor

   Tohle je snadné, víme-li jak na to. Protože $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je konstanta, je $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T$ (viz tabulky v §8.5.2). Kdo to pořád nechápe, ať si místo $\mathbf{y}^T\mathbf{x}$ představí $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$.

2. (1 bod) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce $f(x, y) = x^2y$ v bodě $(1, -1)$. Výsledný polynom zjednodušte.
   $f'(x, y) = [2xy \;\; x^2]$, $T_1(x, y) = -1 + f'(1, -1)[x - 1 \;\; y + 1]^T = -1 + [-2 \;\; 1][x - 1 \;\; y + 1]^T = y - 2x + 2$
3. Máme soustavu tří rovnic $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1x_2 = 1$, $x_1 - x_2 = 0$ o dvou neznámých x_1, x_2.

   a) (1 bod) Najděte řešení soustavy algebraicky. Pokud to nejde, odůvodněte.
   Nejde, je přeurčená. Jde to ověřit obrázkem - tři křivky se neprotínají.

   b) (1 bod) Chceme soustavu řešit přibližně pomocí čisté Gaussovy-Newtonovy metody. Napište vzorec pro iteraci této metody.
   $\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $(x_1, x_2) := (x_1, x_2) - \mathbf{g}'(x_1, x_2)^+\mathbf{g}(x_1, x_2)^T$ (v té iteraci asi budou k vektorům (x_1, x_2) nějak psát indexy k a $k + 1$, je několik možností jak to mohou udělat, ale musí to dávat smysl).

4. Je dán nenulový vektor $\mathbf{a}$ a symetrická positivně definitní matice $\mathbf{C}$. Hledáme lokální extrémy funkce $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$ pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

   a) (1 bod) Najděte bod (tj. napište pro něj vzorec) splňující podmínky prvního řádu na lokální extrémy. Pokud je takových bodů více, najděte je všechny.
   $L(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{a}^T\mathbf{x})$, $L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda)^T = \mathbf{C}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$, z toho $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}$, dosadíme do podmínky $\lambda\mathbf{a}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a} = 1$, z toho dostaneme λ a dosadíme zpátky: $\mathbf{x} = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a})/(\mathbf{a}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a})$. Je tedy jen jeden takový bod.

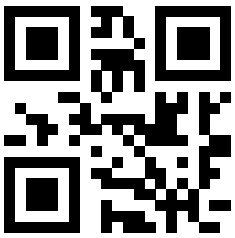
   b) (1 bod) Splňuje tento bod (body) podmínky regularity? Odpověď odůvodněte.
   Podmínky regularity vyžadují (viz §11.2), aby řádky Jacobiho matice (neboli gradienty omezení) ve spočteném lok. extrému $\mathbf{x}$ byly lin. nezávislé. My máme jen jedno omezení $g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} - 1 = 0$, tedy jeho gradient v lok. extrému musí být nenulový. To tak je, neb $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ a to je nenulové z předpokladu.

5. (1 bod) Hledáme kořen polynomu $f(x, y) = xy^2 + x^2 + 1$ Newtonovou metodou. Napište iteraci metody. Jestliže to nejde, odůvodněte.
   Tato úloha je nesmysl, protože hledáme kořeny (ne extrém) jedné funkce dvou proměnných, kořenů tedy bude typicky moc. Newtonova metoda na hledání kořenů předpokládá soustavu se stejným počtem rovnic jako neznámých, jinak iterace ani nejde napsat (obdélníkový Jacobián nemá inverzi).
   Možná někdo vynalézavý zkusí odvodit Newtonovu metodu bez použití naticové inverze: aproximovat funkci Taylorovým polynomem prvního stupně (= afinní funkcí) v okolí bodu (x_k, y_k) a pak hledat kořen této afinní funkce. To dává jistý smysl, ale ta afinní funkce stejně bude mít nekonečně mnoho kořenů (což se právě projeví neinvertovatelností, tj. obélníkovitostí, Jacobiánu). Pokud to tento člověk dobře vysvětlí, je to taky správně.

OPT test 19.12.2023 | Příjmení: Jméno:

Odpovědi na následující kvízové příklady VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.
(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

1. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité derivace prvního a druhého řádu v okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Nutná podmínka pro existenci lokálního maxima v bodě $\mathbf{a}$ je:
   (a) $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ Jde o podmínku nutnou, tedy každý lokální extrém ji musí splňovat, za předpokladu že funkce je v něm diferencovatelná (což je z předpokladu).
   (b) Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je positivně definitiní
   (c) Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je positivně semidefinitiní
   (d) Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je kvadratická forma.
ll (e) žádná z uvedených možností

2. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na celém $\mathbb{R}^n$. V jistém bodě $\mathbf{x}^*$ má funkce nulové všechny směrové derivace a Hessova matice $f''(\mathbf{x}^*)$ má vlastní čísla $0, 1, 2$. Pak funkce v bodě $\mathbf{x}^*$
   (a) může, ale nemusí mít globální extrém Bod $\mathbf{x}^*$ je stacionární, tj. je $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, protože parc. derivace jsou speciální případ směrových. Ale Hessián je v tom bodě positivně semidefinitní, takže tam může ale nemusí být lokální minimum (lokální maximum tam ale být nemůže). Toto lokální minimum může být i globální, když funkce není jinde menší (což předpoklady ani nevynucují ani nevylučují).
   (b) nemá globální extrém
   (c) nemá lokální extrém
   (d) má lokální extrém, který ale není globální
ll (e) žádná z uvedených možností

3. Nechť $n = 10$. Nechť $B = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \ \forall i = 1, \dots, n \,\}$, kde a_i, b_i jsou konstanty splňující $a_i < b_i$. Pak funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ má na množině B
   (a) žádná z uvedených možností Množina je kvádr (box) a funkce je vzdálenost od počátku. Protože je množina uzavřená a omezená, bude určitě aspoň jedno globální minimum a aspoň jedno globální maximum (to plyne např. z Weirestrasovy věty, viz §9.2 ve skriptech), které budou zároveň lokální. Minimum bude ale zároveň nejvýše jedno – to plyne např. z toho, že nejbližší bod uzavřené konvexní množiny k nějakému bodu se vždy nabývá právě v jednom bodě (footnote na str. 68 ve skriptech), ale i kdybyste tohle neznali, můžete to uhodnout, když zkusíte několik příkladů. Maxim ale může být více (např. čtverec se středem v počátku má maximum v každém vrcholu).
   (b) právě jedno lokální minimum, více než jedno lokální maximum a aspoň jedno globální maximum
   (c) právě jedno lokální minimum a právě jedno globální maximum
   (d) více než jedno lokální minimum
fl (e) sedlový bod

4. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{v}$ je směr největšího růstu funkce f v bodě $\mathbf{x}$, přičemž $\|\mathbf{v}\| = 1$.
   (a) Směrová derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$. Odvozeno ve skriptech v sekci o gradientu.
   (b) Vektor $\mathbf{v}$ je kolmý na $\nabla f(\mathbf{x})$.
   (c) Platí $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
   (d) Směrová derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je nulová.
ll (e) žádná z uvedených možností

5. Máme funkci $f(x) = x \ln x - 1$ (kde ln značí přirozený logaritmus) a hledáme $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Chceme použít numerickou iterační metodu, startující z nějakého počátečního bodu x_0 blízko řešení. Jaká iterace je k tomu nejvhodnější?
   (a) $x_{k+1} = (x_k + 1)/(\ln x_k + 1)$ Hledáme kořen (ne lokální extrém!) funkce f, tedy iterace je $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Když spočítáme derivaci a převedeme na společného jmenovatele, vyjde nám to.
   (b) $x_{k+1} = x_k + (x_k \ln x_k - 1)/(\ln x_k + 1)$
   (c) $x_{k+1} = -x_k \ln x_k$
   (d) $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \ln x_k$, kde posloupnost $\alpha_k > 0$ konverguje k nule
ll (e) žádná z uvedených iterací není vhodná

6. Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x, y) = (x + y - 1)(x - y + 1)$ v bodě $(x_0, y_0) = (0, 0)$ je roven
   (a) té samé funkci f, protože ta je už kvadratická Tak to je, nemusíme vůbec nic počítat (viz skripta Cvičení 8.14).
   (b) nule

(c) $x^2 + (y-1)^2$
(d) $x_0^2 - (y_0 - 1)^2$
ll (e) žádná z uvedených možností

7. Hledáme lokální extrémy funkce $(x-1)^2 + (y-1)^2$ za podmínky $xy = 0$ metodou Lagrangeových multiplikátorů.
(a) Lokální extrémy existují a splňují podmínky prvního řádu na lokální extrémy. Množina přípust. řešení je sjednocení dvou přímek, osy x a osy y. Úč. funkce je čtverec vzdálenosti od bodu $(1,1)$. Je dobré si to nakreslit. Je jasné z úvahy, že jsou dvě lokální a zároveň globální minima: bod $(1,0)$ a bod $(0,1)$. Lokální maxima nejsou. Minima jsou regulární body funkce omezení $g(x,y) = xy$, protože její gradient $\nabla g(x,y) = (y,x)$ je v nich nenulový (sice je tento gradient nulový v počátku, ale to nás nezajímá). Tedy podmínky prvního řádu 11.22 určitě budou splnitelné pro tyto x, y a nějaké λ (to plyne z Věty 11.5 a odvození pod ní). Ověříme to, i když to už není třeba. Podmínky prvního řádu jsou (dostaneme např. s pomocí Lagr. funkce) $2(x-1) = \lambda y$, $2(y-1) = \lambda x$, $xy = 0$. To je soustava 3 rovnic o 3 neznámých. Tu nemusíme řešit pro všechny tři neznámé, stačí jen pro každý extrém dosadit x, y a dopočítat λ. Např. první extrém $(x,y) = (1,0)$ dá $\lambda = -2$, trojice x, y, λ pak tedy splňuje podmínky.
(b) Lokální extrémy existují, ale podmínky prvního řádu nemají řešení, neboť omezení nesplňuje podmínku regularity.
(c) Lokální extrémy existují a jsou regulárními body omezení, přesto však podmínky prvního řádu nemají řešení.
(d) Lokální extrémy neexistují.
ll (e) žádná z uvedených možností