B0B33OPT - Optimalizace - Test1

Jméno	Příjmení	Už. jméno	Podpis
Jakub	**Janoušek**	**janouja9**	

Řešení testu pište perem na papír (tedy ne do počítače). Zadání příkladů nemusíte opisovat. Jednotlivé příklady oddělujte vodorovou čarou přes celou šířku papíru. Každý příklad příp. jeho část uvoďte příslušným číslem nebo písmenem v kroužku.

Do řešení pište nejen odpovědi ale i jejich odůvodnění a postupy řešení. Správná odpověď bez odůvodnění je neplatná!

Řešení celého testu se musí vejít na maximálně 4 stránky A4.

Na konci testu vaše řešení oscanujte nebo ofoťte (v tom případě zajistěte dobrou kvalitu snímků) a nahrajte do Brute do úlohy Test1. Dovolené formáty jsou PDF, JPG a PNG. Pokud odevzdáte více souborů např. ve formátu JPG, musí se jmenovat 1.jpg, 2.jpg atd. a být zabalené v jednom ZIP souboru.

Během testu můžete používat materiály k předmětu (skripta, slajdy, Vaše zápisky), nesmíte ale s nikým komunikovat. Prosíme, nezneužívejte situace a nepodvádějte! Při odhaleném podvodu předmět pro studenta okamžitě končí.

Otázka 1

Chceme vyřešit soustavu rovnic

$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} + \mathbf{c} = \lambda\mathbf{1}, \quad \mathbf{y}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$

kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou známé matice, $\mathbf{c}$ je známý vektor, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou neznámé vektory a λ je neznámý skalár. Soustavu přepište do tvaru $\mathbf{Pu} = \mathbf{q}$, kde matice $\mathbf{P}$ a vektor $\mathbf{q}$ obsahují známé konstanty a vektor $\mathbf{u}$ obsahuje všechny neznámé.

Otázka 2

Najděte přibližné řešení soustavy

$y = 1, \quad x = 2 + y, \quad x = 0$

ve smyslu nejmenších čtverců.

Otázka 3

Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Tvrdíme, že číslo $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ je nezáporné pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Je toto tvrzení pravdivé? Odpověď dokažte. (Nápověda: Je matice symetrická?)

Otázka 4

Závislost kroutivého momentu elektrického motoru na velikosti napájecího proudu je modelována regresní funkcí

$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 10^x + a_4 10^{-x}$.

Naměřili jsme n dvojic $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, kde x_i je napájecí proud a y_i je kroutivý moment motoru. Chceme odhadnout neznámé koeficienty $a_1, \ldots, a_4$ regresí ve smyslu nejmenších čtverců, tj. tak, aby $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$ bylo co nejmenší. Napište matlabskou funkci `a = regres(X)`, kde `a` je sloupcový vektor obsahující koeficienty $a_1, \ldots, a_4$ a `X` je matice rozměru $2 \times n$, jejíž sloupečky jsou naměřené dvojice $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Jestliže nedokážete úlohu vyřešit přesně, vyřešte ji aspoň přibližně.

Otázka 5

Nechť vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mají stejnou délku. Tvrdíme, že vektory $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ pak jsou na sebe kolmé. Tvrzení dokažte nebo vyvraťte.

Otázka 6

Najdi ortogonální projekci vektoru $(-1, 1, 0)$ na podprostor $\text{span}\{(2, -1, 2)\}$.

Otázka 7

Najděte bázi prostoru obrazů matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Otázka 8

Existuje lineární funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že $f(-1, 1, 0) = 0$ a $f(1, 0, 1) = 2$? V případě kladné odpovědi najděte takovou funkci. V případě záporné odpovědi odpověď dokažte.

1. $Ax - y + c = \lambda \mathbb{1}$, $y^T B = 0$

2. $B^T y = 0$

1. $Ax + y - \lambda \mathbb{1} = -c$

jednički vektor

$$\begin{bmatrix} A & I & -\mathbb{1} \\ 0 & B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ 2

---

2. $y = 1 \quad x = 2 + y \quad x = 0$

$\Downarrow$

$A\tilde{x} = b$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A^T A \tilde{x} = A^T b$

$\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓

2

(3) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 4 \end{bmatrix}$$

hl. minory $\tilde{A} = -1;\ -4{,}25$

Protože součet matice A zaměnit A za $\tilde{A}$, která je diagonální, a pak víme, že pokud je $x^T \tilde{A} x$ nezáporné pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$, musí být $\tilde{A}$ pozitivně semidefinitní.

2 protože hl. minory jsou záporné, pak matice není poz. semidefinitní a tvrzení neplatí.

(4.)

```
function a = regres(X)
L = size(X,2);
X = X.';
A = [ones(L,1), X(:,1), 10.^X(:,1), 10.^(-X(:,1))];
a = A \ X(:,2);
end
```

2

---

(5) $\sqrt{a^T a} = \sqrt{b^T b}$ $\qquad \dfrac{(a+b)^T (a-b)}{\|a+b\| - \|a-b\|} = 0$

2 $(a+b)^T \cdot (a-b) = 0 = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) + \dots (a_n + b_n)(a_n - b_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 - b_i^2\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \Rightarrow a^T a \; b^T b$$

Platí

6. $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\text{proj}_u(x) = u u^T x = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ✓

2

---

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

protože A má lin. nezávislé řádky, víme, že prostor obrazů bude celé $\mathbb{R}^2$, tedy báze prostoru obrazů bude např.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

2

---

8. $Ax = y$

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$

$-a_1 + a_2 = 0 \qquad a_1 + a_3 = 2$

funkce f musí splňovat tyto rovnice, což splňují např. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, tedy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

2