1.1

c) M = { e^{-x^2} | $x \in R$ } =>

=> $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$ kde $x \in (-\infty, \infty)$ => x bude jen kladné a hodnota výrazu bude růst (je ve jmenovateli) s přibližováním k 0, protože e^x je 1 a to je zároveň maximum (číslo které umocňujeme > 1), kterého lze dosáhnout. Vzhledem k tomu je horní mez 1. Dolní pak bude 0, protože 1/ ∞ = 0. Interval bude mít infimum v 0, protože 1/ ∞ = 0 , a e^{x^2} bude funkce klesající k 0 z obou stran. Jde o infimum ne maximum, a proto bude interval otevřený zleva.
=> M = (0 , 1]

e) M = { x + y | $x^2 + y^2 = 1$ } =>
=> $x^2 + y^2 = 1$ je rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku, fce. z = x + y je lineární fce. a lze ji přepsat jako y = -x + z , grafem fce. je přímka (graf je klesající) se sklonem 45°, která bude posunutá o z. Hodnota z se pak může pohybovat na intervalu (uzavřeném) který zároveň popisuje danou množinu a to
=> M = [- $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]
PS: Tuto úlohu jsme počítali na cvičení až na to, že tam šlo o vnitřek kruhu tady jde o hranici.

f) M = { |x| + |y| | $x^2 + y^2 = 1$ } =>
=> $x^2 + y^2 = 1$ je rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku, fce z = |x| + |y| bude maxima nabývat v bodech [+/- $\frac{\sqrt{2}}{2}$,+/- $\frac{\sqrt{2}}{2}$] , [-/+ $\frac{\sqrt{2}}{2}$,+/- $\frac{\sqrt{2}}{2}$]
,kde nám záp. znaménka pohltí absolutní hodnota a minimum bude potom [0,+/-1] , [+/-1,0]. Z toho plyne že „z“ může dosahovat hodnot, které zároveň popisují množinu M.
=> M = [1 , $\sqrt{2}$]

h) M = {|x-y| | , $x \epsilon [0,1]$,
$y \in (1,2)$ } =>
=> vzdálenost na číselné ose mezi body x a y bude maximální když x = 0 a y = 2 (bráno limitně ,protože 2 do intervalu nepatří) a minimální mezi body x = 1 a y = 1 (1 do intervalu nepatří), množina M projde všechny vzdálenosti v tomto rozsahu
=> M = (0 , 2)

1.3

d) ve vesnici jsou chalupy $\underline{ch}_i$, kde i = 1 .. n a jedna pošta $\underline{p}$ =>

=> **$\min\{\max\|\underline{ch}_i - p\|_2 \mid p \in vesnici\}$**

, kde maximum hledáme přes $\underline{ch}_i$,kde i = 1 .. n (nejmenší vzdálenost od **nejvzdálenější chalupy**) a minimum z těchto vzdáleností => přes $p \in R^2$ (pochopitelně budeme uvažovat omezení souřadnic kruhovou hranicí vesnice)

f) máme vektory $\underline{a}_i$, $\underline{a}_i = (x_i, y_i)$, kde i = 1 .. m, které nám ukazují na místa bodů a kružnici ve tvaru $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, jejíž střed není nutně v počátku uvažovaného systému (je v bodě $[x_0, y_0]$) a poloměr je roven r. Výsledek je násl.

=> **$\min\{ \sum_{i=1}^{m} \min(\|a_i - (x,y)\|_2 - \|r\|_2) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$**

, kde vnitřní minimum hledáme přes i = 1 .. n (pro každé a_i hledáme minimální vzdálenost od kružnice popsané , $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$)*, dále musíme vyscítat všechna tato vnitřní minima (tím

máme součet vzdálenosti všech bodů od kružnice a tuto funkci minimalizujeme přes všechny trojrozměrné vektory $\underline{c} = (x_0, y_0, r)$.
*$\|a_i - (x,y)\|_2$ je vzdálenost ukazatele na bod a ukazatele na střed kružnice$[x_0,y_0]$ (ukazatel rozumějme 2rozměrný vektor) a $\|r\|_2$ je velikost poloměru, kterou musíme odečíst od normy, abychom dostali vzdálenosti bodů od kružnice, které potom můžeme vyscítat.
% mělo by to být správně ač je to chaotické

1.4

b) $\min\{(x-2)^2+(y-1)^2 \mid x^2 \leq 1 \quad , \quad y^2 \leq 1 \quad \}$, z podmínek vyplývá, že $x, y \in [-1,1]$ (jinak by byly vyší než 1) , v rovnici $(x-2)^2+(y-1)^2$ je evidentní, že minimum kažné ze závorek = 0, hodnova $(x-2)^2$ se pohybuje na intervalu [1,9] a $(y-1)^2$ na intervalu [4,0] , protože součet 2 kladných čísel je číslo kladné je hledané minimum rovno součtu minim obou závorek =>

=> $\underline{v}$ **= (1,1),** $\underline{v} = (x, y) \in R^2$

d) Najdi rozměry krabice bez víka o jednotkovém objemu a co nejmenším povrchu. =>
=> $\min\{P = ab + 2ac + 2bc \mid a.b.c = 1\}$, minimalizujeme přes vektor $\underline{v} = (a, b, c) \in R^3$, pro ujasnění „a“ a „b“ jsou rozměry podstavy „c“ je výška krabice. Pro minimalizaci plochy stačí spočítat vázaný extrém, nebo (moje cesta) funkci P převést za využití podmínky na funkci 2 proměnných. $P = ab + 2/b + 2/a$ => $P'/a = b - \frac{1}{a^2}$, $P'/b = a - \frac{1}{b^2}$ => $a = b = \sqrt[3]{2}$, $c = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

=> $\underline{v} = \left(\sqrt[3]{2} \ , \ \sqrt[3]{2} \ , \ \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right)$

e) $\min\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \prod_{i=1}^{n} x_i > 0, x_i \in \{-1,1\}\}$, je třeba si uvědomit že pokud n je sudé není moc co řešit všechny složky $x_i = -1$, pokud je liché bude platit totéž s tím, že lichý prvek bude = 1.

=> **2/n → -n**
=> !(2/n) → -n+2

% ! = negace

Zbyněk Bambušek / OPT - pondělí 5/6 hodina