7) máme zobrazení $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$

a) A je antisymetrická => f(A) orthogonální

–> $A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ -a12 & a22 & a23 \\ -a13 & -a23 & a33 \end{vmatrix}$ toto je antisymetrická matice obecně

$(I - A)(I + A)^{-1}$ pokud A je antisymetrická můžu psát $A = -A^T$, pak tedy matice po zobrazení je rovna $(I + A^T)(I + A)^{-1}$ dále víme, že má být ortogonální tj. $AA^T = I$ =>

=> $(I + A^T)(I + A)^{-1}((I + A^T)(I + A)^{-1})^T = I$

$(I + A^T)(I + A)^{-1}(I^T + A)(I^T + A^T)^{-1} = I$

$(I + A^T)(I + A)^{-1}(I + A)(I + A^T)^{-1} = I$ / výraz $(I + A)^{-1}(I + A) = I$, tvrzení vychází definice inverzní matice $XX^{-1} = I$

$(I + A^T)(I + A^T)^{-1} = I$ / je pravda, stejný důvod jako při předchozí operaci **Q.E.D.**

b) A je orthogonální => f(A) antisymetrická,aby toto platilo musí být pravda následující: $B = - B^T$ (definice orthogonální matice) , kde B je nově vzniklá matice $B = (I-A)(I+A)^{-1}$, za I můžu libovolně dosadit $A^TA = I$ vzledem k orthogonálnitě.

→ $(I - A)(I + A)^{-1} = - ((I - A)(I + A)^{-1})^T$

$(I - A)(I + A)^{-1} = - (I - A^T)(I + A^T)^{-1}$

$(I - A)(I + A)^{-1} = - (AA^T - A^T)(A^TA + A^T)^{-1}$

$(I - A)(I + A)^{-1} = - (A – I)A^T(A^T)^{-1}(I + A)^{-1}$ / $I = A^T(A^T)^{-1}$ vychází z definice jednotkové mat.

$(I - A)(I + A)^{-1} = - (A – I)(I + A)^{-1}$

$(I - A)(I + A)^{-1} = (I - A)(I + A)^{-1}$

Q.E.D.

c) f(f(A)) = A, tj. dokažte, že zobrazení f je inverzní samo k sobě –>

→ $A = (I – (I - A)(I + A)^{-1})(I + (I - A)(I + A)^{-1})^{-1}$ toto je rovnice, která vyjadřuje tvrzení (pochopitelně $\forall A$)

$A(I + (I - A)(I + A)^{-1}) = I - (I - A)(I + A)^{-1}$ /roznásobím A

$A+A(I - A)(I + A)^{-1} = I - (I - A)(I + A)^{-1}$ /násobím zprava výrazem (I + A)

$A(I + A) + A(I – A) = I(I + A) - (I – A)$ /násl. Úprava jen roznásobím a odstraním ()

$A+ A^2 +A – A^2 = I^2 + A - I + A$ /vyščítám

$2A = 2A$ **Q.E.D.**

Matice kterými násobíme jsou vždy čtvercové, protože mají k sobě inverzní matice.

=> b) také platí protože už je dokázáno a) a víme ,že f(f(A)) = A, ke každé antisym. matici toto zobrazení najde orthogonální a tak platí i opak. A naopak z důkazu b) by plynulo a)

9)

a) X=AB, Y=BA má stejný součet na diagonále.(Zde jen, že prvek x_{11} je prvek na 1ním řádku 1ního sloupce, analogicky je jasné co znamená násl. Zápis.)

$x_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$ $\quad y_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1n}a_{n1}$

$x_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}$ $\quad y_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \dots + b_{2n}a_{n2}$

… …

$x_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn}$ $\quad y_{nn} = b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \dots + b_{nn}a_{nn}$

V prvním sloupci je jsou prvky diagonály matice vzniklé součinam AB a ve druhém BA.

Hned na první pohled je jasné, že $\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \sum_{i=1}^{n} y_{ii}$

Např. Prvek $a_{12}b_{21}$ se v druhém sloupci nachází na jiném místě (druhý řádek) , ale pro nás je

podstatné, že tam je. A tak to bude se všemi prvky, což je zcela evidentní **Q.E.D.**

b) AB – BA != I musí být nutně pravda, protože stopa jednotkové matice bude n, kde n je rank(I) a v předchozím příkladě jsme si dokázali, že součin AB a BA bude mít stejnou stopu, ovšem pokud je tomu tak, pak rozdíl stop výsledné matice bude 0 a 0 != n **Q.E.D.**

10)

a) [A; B] + [B; A] = 0 , proč ? Protože [A; B] = AB – BA
[B; A] = BA – AB
=> AB – BA + BA – AB = 0, ale pozor samozřejmě jen pokud je součin AB a BA definovaný a to **bude platit jen pro matice se opačnými rozměry** (když A bude m x n pak B musí být n x m).

b) [A; [B; C]] + [B; [C; A]] + [C; [A; B]] = 0
=>A(BC – CB) - (BC – CB)A + B(CA – AC) - (CA – AC)B + C(AB – BA) - (AB – BA)C = 0
ABC – ACB – BCA + CBA + BCA – BAC – CAB + ACB + CAB – CBA – ABC + BAC = 0
bude platit jen pro čtvercové matice jinak součin nebude definován. (tím si nejsem úplně jist)
Q.E.D.