Zkouška B33OPT 7.2.2019	Jméno: ADAM VALEK Body:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Příklady nejdříve vypracujte nanečisto na samostatné papíry. Tyto papíry neodevzdávejte. Pak postupy a odpovědi přepište načisto do písemky do připravených mezer. Pište čitelně! Postup musí obsahovat všechny jeho kroky a mezivýsledky. Odpověď bez postupu se hodnotí 0 body.

1. Drát o délce 2 chceme přestřihnout na dva kusy, přičemž jeden kus chceme ohnout do tvaru čtverce a druhý do tvaru rovnostranného trojúhelníku. Kde (pokud vůbec) musíme drát přestřihnout, aby součet obsahů čtverce a trojúhelníku byl

   (a) (2b) co nejmenší,

   (b) (2b) co největší.

2. Máme matici $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ se sloupci $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ a $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé vektory. Splňte následující úkoly a odpovědi dokažte. Odpovědi se snažte najít v co nejjednodušší formě.

   (a) (1b) Najděte hodnost matice $\mathbf{C}$.

   (b) (1b) Najděte libovolnou bázi prostoru $\operatorname{rng}\mathbf{C}$ (vyjádřenou pomocí vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$).

   (c) (1b) Najděte libovolnou bázi prostoru $\operatorname{null}\mathbf{C}^T$ (vyjádřenou pomocí vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$).

   (d) (1b) Najděte ortogonální projektor na podprostor $\operatorname{rng}\mathbf{C}$. Zvolte co nejjednodušší postup.

   (e) (1b) Jako ilustraci výsledků výše najděte libovolnou bázi nulového prostoru matice $\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}$.

3. (2b) Je pravda, že pro každou matici $\mathbf{A}$ a každé kladné číslo t je matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T + t\mathbf{I}$ regulární? Odpověď dokažte.

4. (2b) Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dána vzorcem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{y} + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Napište vzorec pro gradient $\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^T$ funkce f.

5. (2b) Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definovaná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n}(1/x_i)$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Najděte minimum této funkce na množině $\mathbb{R}^n_+ = \{\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}$. Diskutujte řešení v závislosti na vektoru $\mathbf{c}$.

6. Chceme minimalizovat výraz $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{A}$ je daná positivně semidefinitní matice.

   (a) (1b) Napište co možná jednoduché vyjádření pro optimální řešení a optimální hodnotu úlohy.

   (b) (1b) Je tato úloha konvexní? Odpověď dokažte.

   (c) (1b) Jak by se řešení změnilo, kdybychom omezení změnili na $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1$? Proč?

   (d) (1b) Jak by se řešení změnilo, kdybychom omezení změnili na $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 1$? Proč?

7. (2b) Je dán seznam bodů v rovině. Hledáme takovou kružnici, aby součet čtverců vzdáleností bodů k této kružnici byl minimální. Tvrdíme, že střed optimální kružnice bude ležet v těžišti daných bodů. Je to pravda? Odpověď dokažte.

Zvukový signál modelujeme funkcí $f(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$. V časech $t_1, \ldots, t_n$ jsme naměřili úrovně signálu $y_1, \ldots, y_n$. Hledáme parametry $a, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby chyba aproximace ve smyslu nejmenších čtverců $\sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - y_i)^2$ byla co nejmenší.

(a) (1b) Formulujte úlohu ve tvaru $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$. Pokud to nejde, odůvodněte.

(b) (2b) Pokud předchozí podúkol nejde splnit, navrhněte jinou metodu na výpočet a, ω, φ. Jde-li o iterační metodu, napište iteraci této metody.

(c) (1b) Zdá se logické, že parametr a (amplituda signálu) musí být nezáporný. Je nutno omezení $a \geq 0$ přidávat do formulace úlohy? Co se stane, když to neuděláme? Když to neuděláme, najde vámi navržený algoritmus nezáporné a?

9. Najděte vzdálenost množiny $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$ od kružnice s poloměrem 1 a středem v bodě $(2, 0)$.

(a) (1b) Formulujte tuto optimalizační úlohu (musí být zřejmé, co je účelová funkce, co omezující podmínky a co proměnné). Formulaci vysvětlete a odůvodněte její správnost.

(b) (2b) Úlohu vyřešte, přičemž na kalkulačce smíte použít jen operace plus, minus, krát, děleno. Nedokážete-li úlohu vyřešit přesně, navrhněte vhodnou iterační metodu a napište vzorec pro iteraci této metody (pro danou úlohu).

10. (2b) Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\|\mathbf{x}\|_2}$. Je funkce norma (příp. pro jaká n)?

11. Máme úlohu $\min\{\, \mathbf{1}^T\mathbf{b} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jsou dané vektory s nezápornými složkami.

(a) (1b) Pro jaká $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je úloha přípustná? Proč?

(b) (1b) Pro jaká $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je úloha omezená? Proč?

(c) (2b) Je-li úloha přípustná a omezená, úvahou najděte její optimální hodnotu. Odpověď dokažte.

(d) (1b) Jako ilustraci předchozího podúkolu najděte optimální hodnotu úlohy

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \qquad + 4x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

12. Máme lineární program (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 \\ \text{za podmínek} \quad & -x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 5x_4 \leq -3 \\ & 6x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq -2 \\ & x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq -5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) (2b) Chtěli bychom úlohu řešit základním simplexovým algoritmem. To ovšem přímo nejde, protože úloha není ve vhodném tvaru a nemáme počáteční přípustnou bázi. Napište pomocnou úlohu LP, kterou lze použít na nalezení přípustného bázového řešení (a odpovídající báze) úlohy (P). Kromě této pomocné úlohy napište také její simplexovou tabulku. Pomocnou úlohu nemusíte řešit.

(b) (1b) K úloze (P) napište duální úlohu.

(c) (2b) Je $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 0)$ optimální řešení úlohy (P)? Odpověď dokažte pomocí LP duality. Pokud ano, najděte optimální řešení duální úlohy.