Zkouška OPT 24.5.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. Máme funkci $f(x,y) = x^2 - 6xy - 18x + y^2 + 22y + 49$.
   (a) **(4b)** Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \alpha$, kde $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je symetrická a $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) **(2b)** Najděte spektrální rozklad matice $\mathbf{A}$.
   (c) **(2b)** Rozhodněte, zda má funkce f globální minimum/maximum a svou odpověď zdůvodněte.
   (d) **(2b)** Určete funkční hodnotu $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$, kde $\mathbf{v}$ je jednotkový vlastní vektor matice $\mathbf{A}$.

2. Firma vyrábí 2 druhy hnojiva, jejichž prodejní ceny jsou 30 000 a 20 000 korun za tunu. Při výrobě tuny prvního hnojiva se spotřebuje jednotka množství každé ze tří surovin (A,B,C), zatímco pro výrobu tuny druhého hnojiva je potřeba jednotka suroviny A a 3 jednotky suroviny C. Na skladě je 8 jednotek suroviny A, 6 jednotek suroviny B a 18 jednotek suroviny C. Cílem je určit kolik vyrábět každého hnojiva, aby byla celková prodejní cena maximální.
   (a) **(2b)** Napište matematickou formulaci úlohy.
   (b) **(6b)** Posuďte, zda má optimální řešení. Pokud ano, spočtěte ho (grafické řešení musí mít dostačující popis, náčrtek nestačí).
   (c) **(2b)** Pozměňte prodejní ceny tak, aby zůstaly pozitivní, a aby měla úloha nekonečně mnoho řešení. Tyto řešení popište.

3. Maximalizujeme lineární funkci $x_1 - 2x_2$ při omezeních $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$, $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 3$, $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$, kde proměnné x_1, x_4 jsou neomezené a proměnné x_2, x_3 jsou nezáporné.
   (a) **(4b)** Napište tuto úlohu jako lineární program (P) a najděte k němu duální úlohu (D).
   (b) **(2b)** Pokud víte jen to, že úloha (P) je přípustná, lze z toho usoudit, že i úloha (D) je přípustná?
   (c) **(2b)** Optimální hodnota (P) je 2.5. Jaký je vztah mezi číslem 2.5 a hodnotou účelové funkce úlohy (D) pro její libovolné přípustné řešení? Může někdy nastat rovnost?
   (d) **(2b)** Optimální řešení úlohy (P) je $(2.5, 0, 0, 3.5)$. Existuje optimální řešení úlohy (D)? Musí mít optimální řešení úlohy (D) aspoň jednu složku nulovou?

4. Řešte následující úlohy:
   (a) **(1b)** Je funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(\mathbf{x}) = |x_1 + 2x_3| + |x_2 - x_3|$ norma?
   (b) **(1b)** Je funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(\mathbf{x}) = |x_1 + x_2| + |x_1 + x_3| + |x_2 + x_3|$ norma?
   (c) **(2b)** Spočítali jsme redukovaný SVD matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3000\times 5000}$. Matici $\mathbf{A}$ aproximujeme maticí
   $$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{100} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$
   kde s_i jsou singulární čísla a $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ singulární vektory. Jak jde spočítat $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ bez toho, abychom počítali normu nebo stopu nějaké matice?
   (d) **(3b)** Vztah mezi veličinami x a y modelujeme lineární regresní funkcí
   $$y \approx f(x; p_1, p_2) = p_1 e^{-x} + p_2 e^{-3x},$$
   kde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Máme data $(x_1, y_1), \ldots, (x_{100}, y_{100})$. Přesně formulujte úlohu na hledání neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců a napište tvar řešení v závislosti na datech.
   (e) **(3b)** Máme funkci $f(x_1, x_2) = \min\{x_1 - x_2, -2x_1 + x_2\}$ a hledáme její maximum na množině
   $$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \geq 3\}.$$
   Lze takovou úlohu formulovat jako lineární program? Pokud ano, napište ho.

5. Uvažujme bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a třikrát spojitě diferencovatelné zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujme množinu $M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$.

(a) **(4b)** Uvažujme minimalizaci funkce $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ na množině M. Napište podmínky optimality. Jaký je vztah mezi optimalizačním problémem a podmínkami optimality? Neformulujte obecně, ale za podmínek na $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{h}$.

(b) **(2b)** Jak se změní podmínky optimality, když $\mathbf{A}$ nebude symetrická?

(c) **(2b)** Uvažujme $m = 1$ a $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ a bod $\mathbf{a} = (2, 1)$. Pokud je $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ jednotková matice, který bod z množiny M minimalizuje funkci f? Vysvětlete.

(d) **(2b)** Uvažujme $m = 1$ a $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ a bod $\mathbf{a} = (2, 1)$. Najděte nějakou matici $\mathbf{A}$, pro kterou je $\mathbf{x} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ globální minimum funkce f na množině M. Vysvětlete.

Bodů celkem: 50