Zkouška OPT 4.6.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. Máme následující lineární program:

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 8 \\ & x_1 + \tfrac{1}{8}x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) **(1b)** Rozhodněte, zda je úloha přípustná a zdůvodněte proč.

   (b) **(6b)** Vyřešte úlohu pomocí simplexové metody. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte (inicializace, výběr báze a pivotů, ukončení algoritmu atd.)

   (c) **(3b)** Existuje ještě jiné optimální řešení? Pokud ano, spočtěte jej.

2. Vztah mezi časem t a měřenou veličinou y je popsán přibližně jako $y \approx \alpha e^{\beta t}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Naměříme data $(t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$. Hledáme odhad nezmámých parametrů pomocí nelineární metody nejmenších čtverců.

   (a) **(2b)** Formulujte tuto úlohu jako optimalizační problém a její účelovou funkci vyjádřete ve tvaru součtu čtverců.

   (b) **(4b)** Napište podmínky prvního řádu. Z jedné podmínky vyjádřete jednu proměnnou a dosaďte ji do druhé podmínky tak, abychom dostali jednu rovnici o jedné neznámé. Tuto rovnici řešit nemusíte.

   (c) **(4b)** Původní problém minimalizace čtverců se dá řešit pomocí Gauss-Newtonovy metody, kde krok iterace k se rovná $\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{b}_k$ pro nějakou matici $\mathbf{A}_k$ a vektor $\mathbf{b}_k$. Napište rozměr $\mathbf{A}_k$ a $\mathbf{b}_k$. Napište tvar matice $\mathbf{A}_k$ v co nejexplicitnějším tvaru.

3. Řešte následující úlohy:

   (a) **(2b)** Určete funkční hodnotu $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$, kde $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, kde $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je symetrická a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ délky 3.

   (b) **(4b)** Nalezněte singulární čísla matice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (c) **(4b)** Určete vzdálenost bodu $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ od lineárního prostoru generovaného vektory $(-2, 1, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

4. Uvažujeme funkci $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy$.

   (a) **(4b)** Napište ji ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ a určete definitnost této kvadratické formy.

   (b) **(2b)** Nalezněte minimum funkce $f(\mathbf{x})$ za podmínky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, a určete argument minima.

   (c) **(4b)** Jaké bude řešení úlohy $\min\{f(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$?

5. Student se chce připravit na písemku z optimalizace a přemýšlí, jak pro to nejlépe alokovat svůj čas. Může se buď učit a v tom případě bude jeho porozumění látce odpovídat čtverci času, po který se učil. Nebo se může modlit a pak jeho štěstí při písemce bude odpovídat času stráveném modlením. Celkem má na tyto aktivity student vyhrazených c hodin a chce maximalizovat součin porozumění látce a štestí.

   (a) **(3b)** Formulujte úlohu jako optimalizační problém.

   (b) **(5b)** Vyřešte ji. *Nápověda:* zamyslete se, než začnete dosazovat do vzorečků.

   (c) **(2b)** Jaké by bylo řešení, kdyby se student rozhodl minimalizovat součin porozumění látce a štestí? Vysvětlete.

Bodů celkem: 50