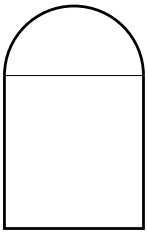
Zkouška OPT 21.1.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. **(5b)** Máme okno tvaru obdélníka sjednoceného s půlkruhem (viz obrázek). Jaký má být poměr stran obdélníkové části okna, aby obsah okna byl co největší při konstantním obvodu okna?



2. Dáno je n bodů $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$. Tyto body tvoří sloupce matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times n}$.
(Poznámka: Nepoužívejte počítač, matlabský kód jen napište na papír. Pokud kód nebude syntakticky zcela správně, nevadí.)

   (a) **(3b)** Napište matlabskou funkci `[a,b,c]=fun(X)`, která spočítá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, aby číslo $\sum_{i=1}^n d_i^2$ bylo minimální, kde d_i značí vzdálenost bodu (x_i, y_i, z_i) od množiny $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\}$.

   (b) **(3b)** Napište matlabskou funkci `[a,b,c]=fun(X)`, která spočítá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, aby číslo $\sum_{i=1}^n |ax_i + by_i + c - z_i|^2$ bylo minimální.

   (c) **(3b)** Napište lineární program, který spočítá čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, aby číslo $\sum_{i=1}^n |ax_i + by_i + c - z_i|$ bylo minimální.

3. **(4b)** Máme funkci dvou proměnných $f(x_1, x_2) = x_1(3x_1 - 2x_2 + 1) - x_2(x_1 + 2x_2 + 3)$. Napište Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě $(\frac{1}{3}, -1)$. Zvolte co nejjednodušší postup (jednoduchost postupu se hodnotí).

4. Máme funkci $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$.

   (a) **(4b)** Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha$, kde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je symetrická a $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (Rada: Ověřte správnost výsledku tohoto podúkolu. Když ho budete mít špatně, máte špatně i ostatní podúkoly.)

   (b) **(2b)** Najděte vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

   (c) **(2b)** Najděte minimum a maximum funkce f, pokud existují. Pokud některé z nich neexistuje, vysvětlete.

   (d) **(2b)** Vrstevnice výšky 2 funkce f je kuželosečka. Je to elipsa, hyperbola, parabola, nebo nic z toho? Proč?

   (e) **(1b)** Vrstevnice výšky 1 funkce f je kuželosečka. Je to elipsa, hyperbola, parabola, nebo nic z toho? Proč?

5. **(6b)** Jsou dána kladná čísla $c_1, \ldots, c_n$. Minimalizujte funkci $f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{y_i}$ na standardním simplexu, tedy za podmínek $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{1}^T\mathbf{y} = 1$.

6. Vyřešte úvahou následující úlohy. Výsledkem u každé úlohy bude (co nejjednodušší) vzorec pro optimální **hodnotu** a vzorec pro optimální **argument** úlohy.

   (a) **(4b)** $\min\{\, |x - a| \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \,\}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je dáno.

   (b) **(3b)** $\min\{\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_1 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$, kde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ je dáno.

7. **(4b)** p-norma vektoru je definovaná jako $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$ pro $p \geq 1$. Dokažte z definice normy, že pro $p = \frac{1}{2}$ se nejedná o normu.

8. **(4b)** Lineární program $\max\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ (pozor, je tam maximum!) je daný simplexovou tabulkou

-1	0	-3	0	1	0	0
1	0	3	0	-1	1	4
3	1	2	0	-2	0	1
-1	0	4	1	-1	0	2

   Udělejte jednu iteraci simplexového algoritmu a napište výslednou simplexovou tabulku. Napište aktuální bázové řešení a hodnotu kritéria po této iteraci. Pokud to nejde, vysvětlete.

Bodů celkem: 50