Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	5	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	10	50
Počet bodů						

1. Uvažujeme vektory $\mathbf{x} = (1, 0, -2), \mathbf{y} = (2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ a matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} & \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

kde $\|.\|$ je eukleidovská norma. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení a každou odpověď zdůvodněte.

(a) (2 b) Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je ortogonální projektor na rovinu procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$.

(b) (2 b) Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ má vlastní číslo 1.

(c) (2 b) Matice $\mathbf{A}$ je ortogonální.

(d) (2 b) Reálná funkce $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|^2$ je všude diferencovatelná, kde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$.

(e) (2 b) Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je regulární.

Řešení:

(a) Ano. Jelikož je $\mathbf{A}$ matice se dvěma ortonormálními sloupci, podle definice je $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ maticí projekce na sloupcový prostor matice $\mathbf{A}$, což je právě rovina procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$.

(b) Ano. Pro $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ vezmeme vektor tvaru $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$, pak platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$, neboli $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$ je vlastní vektor a 1 je vlastní číslo. To je intuitivně zřejmé, protože $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$ již leží v prostoru, na který promítáme, a další projekcí se tedy nezmění.

(c) Ne, protože má 2 sloupce a 3 řádky.

(d) Ano, neboť všechny zúčastněné funkce v definici f jsou diferencovatelné.

(e) Ne, protože např. všechny vektory ležící v přímce kolmé na vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ se zobrazí na nulový vektor.

2. Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (4 b) Nalezněte singulární čísla matice $\mathbf{A}$.

(b) (3 b) Nalezněte lineárně nezávislé pravé singulární vektory matice $\mathbf{A}$.

(c) (3 b) Nalezněte lineárně nezávislé levé singulární vektory matice $\mathbf{A}$.

Řešení:

(a) Určíme nenulová vlastní čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ nebo $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, jejich odmocněním získáme všechna nenulová singulární čísla matice $\mathbf{A}$. Platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, charakteristický polynom je $\lambda^2 - 17\lambda + 16 = (\lambda - 16)(\lambda - 1)$. Tedy singulární čísla jsou $s_1 = 4$ a $s_2 = 1$.

(b) Stačí spočítat vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Pro vlastní číslo 16 jsou tvaru $(t, 2t)$ a pro vlastní číslo 1 mají tvar $(-2t, t)$. Tedy volíme např. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.

(c) Platí, že každý levý singulární vektor lze získat jako $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{s_i}$. Tedy pro pravé singulární vektory nalezené v bodu (b) dostaneme $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ a $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

3. Řešte následující úlohy.
   (a) (6 b) Minimalizujte funkci $f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$ za omezení $x_1 + x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \leq 5$, $-x_1 + 4x_2 \geq 2$, kde $x_1, x_2 \geq 0$ a vysvětlete postup řešení.
   (b) (3 b) Formulujte duální úlohu k té předchozí.
   (c) (1 b) Jaká bude optimální hodnota duální úlohy?

Řešení:

(a) Jedná se o lineární program, kde množina přípustných řešení je omezený polyedr s vrcholy $(0, \frac{1}{2}), (0, 4), (1, 3), (2, 1)$. Víme, že minimum se nachází v nějakém vrcholu. Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že minimum se nachází v bodě $(2, 1)$ a má hodnotu 0.

(b) Maximalizuj $-4y_1 - 5y_2 + 2y_3$ za podmínek $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ a $-y_1 - 2y_2 - y_3 \leq -1$, $-y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 2$.

(c) Obě úlohy mají podle věty o dualitě stejnou optimální hodnotu 0.

4. Minimalizujeme funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$.
   (a) (2 b) Problém načrtněte a naznačte, kde přibližně bude ležet minimum.
   (b) (6 b) Formulujte Lagrangeovu funkci, podmínky optimality prvního řádu a zjednodušte je tak, abyste dostali jednu rovnici $g(x) = 0$ s jednou neznámou x.
   (c) (2 b) Jak byste tuto rovnici řešili? Napište jednu iteraci vybrané metody. Pokud budete používat derivace, rozepište je, nepište jen g' či g''.

Řešení:

(b) Lagrangeova funkce je $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(e^x - y)$. Podmínky optimality jsou $2x + \lambda e^x = 0$ a $2y - \lambda = 0$. Dosazením λ z druhé rovnice do první dostaneme $x + ye^x = 0$ a z podmínky přípustnosti dále $x + e^{2x} = 0$.

(c) Tuto rovnici lze řešit např. metodou největšího spádu. Její iterace má tvar $x_{k+1} = x_k - \alpha(1 + 2e^{2x_k})$, kde $\alpha > 0$ je krok.

5. Uvažujme funkci $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + z^2$.
   (a) (2 b) Jaká je směrová derivace funkce f ve směru $(1, 0, 0)$?
   (b) (3 b) Napište Taylorův polynom prvního řádu kolem bodu $(1, 1, 1)$. Pokud budete používat nějaké derivace, rozepište je, nepoužívejte f' či f''.
   (c) (2 b) Je f konvexní? Proč?
   (d) (3 b) Je vrstevnice funkce f výšky 1 konvexní množina? Proč?

Řešení:

(a) Směrová derivace funkce f ve směru $(1, 0, 0)$ je parciální derivace podle první proměnné, tedy $2x + 2y$.

(b) Vzhledem k tomu, že $f(1, 1, 1) = 5$ a $f'(1, 1, 1) = (4, 4, 2)$, má Taylorův polynom tvar $T_1(x, y, z) = 5 + 4(x - 1) + 4(y - 1) + 2(z - 1)$.

(c) Funkce je konvexní, neboť jde zapsat jako $(x + y)^2 + z^2$, což je součet dvou konvexních funkcí, přičemž první funkce je konvexní jakožto složení afinní a konvexní funkce.

(d) Vrstevnice má tvar $\{(x, y, z) \mid (x + y)^2 + z^2 = 1\}$. Tato množina konvexní není, protože do ní patří body $(0, 0, 1)$ a $(0, 0, -1)$, ale nikoli bod $(0, 0, 0)$, který leží na úsečce mezi nimi.