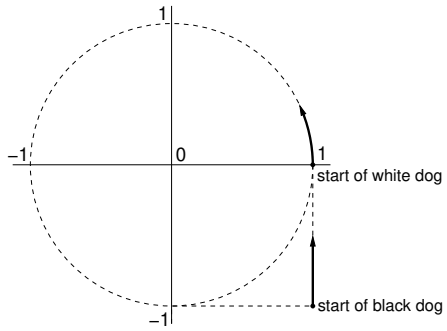
**Zkouška OPT 31.1.2024** | Jméno: Příjmení:

**Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis.**
**Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.**

---

1. Dva psi (závodní chrti) běhají po vodorovné louce. Bílý pes běží konstantní rychlostí 1 km/min po kružnici s poloměrem 1 km, přičemž v čase nula vyběhl směrem na sever z bodu vzdáleného 1 km východně od středu kružnice. Černý pes vyběhl v čase nula směrem na sever z bodu vzdáleného 1 km jižně od startovního bodu bílého psa a běží rovnoměrně přímočaře stejnou rychlostí jako bílý pes. Kdy budou psi sobě nejblíže?




   (a) **(2b)** Zformulujte matematicky jako optimalizační úlohu. Musí být jednoznačně patrno, co je účelová funkce, co proměnné a co případné omezující podmínky. Formulaci zvolte tak, aby šla dobře řešit.

   (b) **(2b)** Úlohu vyřešte. (Výsledkem musí být odpověď na otázku položenou v zadání.)

   Poloha bílého psa v čase $t$ je $(\cos t, \sin t)$, černého psa $(1, t-1)$, čtverec jejich vzdálenosti $f(t) = (\cos t - 1)^2 + (\sin t - t + 1)^2$. Stacionární podmínka $2f'(t) = (t-1)(\cos t - 1) = 0$, tedy buď $t = 1$ nebo $t = 2k\pi$. Druhá derivace $2f''(t) = (t-1)\sin t - \cos t + 1$ je v bodě $t = 1$ kladná a v bodech $t = 2k\pi$ nulová (takže o těchto bodech nám nic neřekne). Ale úvahou vidíme, že globální minimum je v bodě $t = 1$.

---

2. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou jako $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu.

   (a) **(2b)** Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce $f$ v okolí daného bodu $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Výsledný vzorec zjednodušte.
   $T^1_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}/\|\mathbf{a}\|$

   (b) **(2b)** Odvoďte vzorec pro směrovou derivaci funkce $f$ v bodě $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ve směru $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Výsledný vzorec zjednodušte.
   $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T/\|\mathbf{x}\|$. $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{a}^T\mathbf{v}/\|\mathbf{a}\|$.

---

3. Mějme funkci $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$.

   (a) **(2b)** Najděte všechny stacionární body funkce $f$.

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y & -3x + 6y \end{bmatrix}.$$

   Dostaneme dva stacionární body $(x_1, y_1) = (0, 0)$ a $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

   (b) **(2b)** Pro každý stacionární bod funkce $f$ určete, zda je to lokální extrém a případně jaký.

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad f''(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad f''(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

   První Hessián je indefinitni, tedy bod je sedlo. Vlastni cisla jsou $3(1 \pm \sqrt{2})$, snadneji to jde zjistit z minoru. Druhy Hessiánu je positivně definitní, tedy bod je lokální minimum. Vlastni cisla jsou $\frac{3}{2}(3 \pm \sqrt{5})$, snadneji to jde z minoru.

   (c) **(2b)** Hledáme lokální extrém funkce $f$ čistou Newtonovou metodou. Jaký bude odhad řešení po první iteraci, je-li počáteční odhad $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$?

$$(x, y) \leftarrow (x, y) - f''(x, y)^{-1} f'(x, y)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

4. Máme funkci $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ a množinu $X = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\,\}$.

   (a) **(3b)** Najděte všechny extrémy funkce $f$ na množině $X$. U každého extrému uveďte jeho typ (minimum/maximum, lokální/globální). Výsledky odůvodněte.

   (b) **(2b)** Výsledek ilustrujte obrázkem takto: Nakreslete množinu $X$ a vyznačte nalezené extrémy. Dále pro každý extrém načrtněte vrstevnici funkce $f$ procházející tímto extrémem (stačí část vrstevnice v okolí extrému) .

Množina $X$ je horní půlka kružnice se středem v bodě $(0,0)$ a poloměrem 1. Hodnota $f(x,y)$ je čtverec vzdálenosti bodu $(x,y)$ od bodu $(-1,-1)$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v bodě $(-1,-1)$ a procházející extrémem.

Bod $(-1,0)$ je globální minimum. Bod $(1,1)/\sqrt{2}$ je globální maximum. Bod $(1,0)$ je lokální (ale ne globální) minimum. Nebylo třeba nic počítat (přesto to spousta lidí dělala), žádné Lagrangeovy multiplikátory, derivace..., vše je snadno vidět z obrázku (pokud vás tedy napaslo si ho nakreslíte dřív, než začnete hledat extrémy).

---

5. Dáno je $n$ bodů $(x_1,y_1,z_1),\ldots,(x_n,y_n,z_n) \in \mathbb{R}^3$. Tyto body tvoří sloupce matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times n}$. Napište algoritmus (tj. postup, nemusí to být kód v programovacím jazyce), který spočítá čísla $a,b,c \in \mathbb{R}$ taková, aby výraz $\sum_{i=1}^n d_i^2$ byl minimální, kde $d_i$ je definováno jako

   (a) **(2b)** $d_i = ax_i + by_i + c - z_i$
   Uloha na linearni nejmensi ctverce / linearni regresi. Jde napsat jako $\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3} \|\mathbf{Au}-\mathbf{b}\|^2$ kde $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times 3}$ má řádky $(x_i,y_i,1)$ a $c_i = z_i$. Reseni v Matlabu $u = A\backslash\mathbf{c}$.

   (b) **(2b)** $d_i$ značí vzdálenost bodu $(x_i,y_i,z_i)$ od množiny $\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0\,\}$
   Uloha na PCA. Uděláme SVD $\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T$, pak $(a,b,c)$ je sloupec $\mathbf{U}$ odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu (protože zmíněná množina je nadrovina a $(a,b,c)$ je její normála, tedy báze jejího ortog. doplňku).
   Nebo taky můžeme udělat spektrální rozklad $\mathbf{XX}^T = \mathbf{V\Lambda V}^T$ a $(a,b,c)$ bude sloupec $\mathbf{V}$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu.

   (c) **(1b)** $d_i$ značí vzdálenost bodu $(x_i,y_i,z_i)$ od množiny $\{\,t(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\,\}$
   Opět úloha na PCA. Stejné jako minule, jen bereme sloupec odpovídající největšímu singulárnímu/vlastnímu číslu (protože zmíněná množina je přímka a $(a,b,c)$ je její směrový vektor, tedy báze).

---

6. Funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definována tak, že $f(x_1,x_2,x_3)$ je součet dvou nejmenších čísel z čísel $x_1,x_2,x_3$.

   (a) **(3b)** Je funkce $f$ konvexní? Odpověď dokažte (důkaz napište podrobně a srozumitelně).
   Vezmeme třeba $\mathbf{x} = (1,2,3)$, $\mathbf{y} = (3,2,1)$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Pak

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = f(2,2,2) = 4 \not\leq (3+3)/2 = \frac{1}{2}f(1,2,3) + \frac{1}{2}f(3,2,1) = \frac{1}{2}f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{y})$$

   (b) **(1b)** Je funkce $f$ spojitá? Odpověď odůvodněte.
   Je spojitá, protože jde napsat jako $f(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3 - \max\{x_1,x_2,x_3\} = \min\{x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2\}$. Funkce max příp min je spojitá a sčítání/odčítání zachovává spojitost funkcí (viz Věta 8.1 ve skriptech)

---

7. Máme $m$ skladů stejného zboží a $n$ obchodů s tím zbožím. Víme, že $i$-tý sklad (kde $i = 1,\ldots,m$) může dodávat zboží více obchodům najednou, ale má zásobu jen $s_i$ jednotek zboží. Dále víme, že $j$-tý obchod (kde $j = 1,\ldots,n$) požaduje $d_j$ jednotek zboží a jeho požadavek může být uspokojen i více sklady najednou. Cena za dopravu jednotky zboží z $i$-tého skladu k $j$-tému obchodu je $c_{ij}$. Všechna čísla $s_i, d_j, c_{ij}$ jsou nezáporná, sklady se nemusejí vyčerpat. Chceme uspokojit všechny zákazníky při co nejmenší ceně za dopravu.

   (a) **(2b)** Formulujte úlohu jako lineární program. Popište význam proměnných.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{za podm.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, && i = 1,\ldots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, && j = 1,\ldots,n \\
& x_{ij} \geq 0, && i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n
\end{aligned}$$

(b) **(2b)** Nyní předpokládejte, že každý sklad má neomezenou zásobu zboží. Formulujte tuto úlohu jako lineární program (tento program nesmí obsahovat konstanty nekonečné velikosti).

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{za podm.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad j = 1,\dots,n \\ & x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

(c) **(2b)** Úvahou najděte optimální řešení lineárního programu z předchozího podúkolu. Napište vzorec pro jeho optimální hodnotu.
Rozpadne se to na $n$ nezávislých úloh, pro každý obchod jednu:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\ \text{za podm.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_i = d, \qquad j = 1,\dots,n \\ & x_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

kde jsme vynechali indexy $j$. Opt. řešení jedné úlohy bude $d \min_i c_i$. Tedy celková optimální hodnota bude $\sum_j d_j \min_i c_{ij}$.

---

8. Máme úlohu $\min\{\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1 \,\}$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická pozitivně definitní.

   (a) **(1b)** Jak se nazývá množina přípustných řešení úlohy pro $n = 2$? Elipsa.

   (b) **(1b)** Pro jaké $n, \mathbf{a}, \mathbf{C}$ je tato optimalizační úloha konvexní? Odpověď odůvodněte.
   Pro žádné $n$, protože pro žádné $n$ není množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1 \,\}$ konvexní, protože je to povrch elipsoidu.

   (c) **(3b)** Najděte vzorec pro optimální $\mathbf{x}$. Výsledný vzorec zjednodušte. Napovíme, že každý bod splňující podmínky prvního řádu je globální extrém.
   $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}}}$

   (d) **(1b)** Jak by se řešení změnilo, kdyby podmínka byla $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \geq 1$ místo $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1$? Proč?
   Úloha by byla neomezená. Důkaz: Nechť $\mathbf{x}$ je optimální řešení původní úlohy. Bude určitě $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < 0$, protože kdyby $\mathbf{c}^T\mathbf{x} > 0$ tka bychom mohli vybásobit $\mathbf{x}$ mínus jednou a účelová hodnota by klesla přičemž omezení $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 1$ by zůstalo splněné. Poku domezení změníme na $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \geq 1$, tak násobení $\mathbf{x}$ libovolně velkým kladným skalárem neporuší omezení ale zmenší $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ do libovolné záporné hodnoty.