Zkouška OPT 14.2.2024 | Jméno: Příjmení:

Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.

---

1. Hledáme vzdálenost bodu $(1, 2)$ od množiny $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\,\}$.

   (a) **(2b)** Úlohu převeďte do tvaru, kdy hledáme volné minimum funkce jedné proměnné. Pak pro tuto úlohu napište podmínku prvního řádu na volný lokální extrém (formulujte ji šikovně vzhledem k úkolu (b)).
   Minimalizujeme funkci $f(x) = (x-1)^2+(1/x-2)^2$. Je $g(x) = f'(x) = 2(x-1)-2(1/x-2)/x^2 = 0$. Je velmi dobry napad si to zjednodusit vynasobenim cele rovnice x^3 (coz podminku nezmeni, protoze jmenovatel stejne musi byt ruzny od nuly), coz da $g(x) = x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0$.

   (b) **(3b)** Úlohu vyřešte (najděte požadovanou vzdálenost). Na kalkulačce smíte použít jen operace plus, minus, krát, děleno a druhá odmocnina. Nedokážete-li úlohu takto vyřešit přesně, navrhněte vhodnou iterační metodu, napište vzorec pro iteraci metody (pro tuto konkrétní úlohu!), navrhněte vhodný počáteční odhad a spočtěte numericky hodnotu odhadu po první iteraci.
   Newtonova iterace je $x \leftarrow x - g(x)/g'(x) = x - \frac{x^4-x^3+2x-1}{4x^3-3x^2+2}$, coz se da (neni povinne) zjednodusit na $x \leftarrow \frac{3x^4-2x^3+1}{4x^3-3x^2+2}$. Počáteční odhad $x_0 = 1$. Prvni iterace $x_1 = 2/3$. (Vysledek konvergence do strojove presnosti je $x = 0.535687386791873$, ale to nebylo povinné.)
   Kdyz nekdo (nesikovne) nevynasobil rovnici $f'(x) = 0$ monomem x^3, vysla mu Newtonova iterace $x \leftarrow x - \frac{2(x-1)-2(1/x-2)/x^2}{2+6/x^4-8/x^3}$. Zlomek ma pro $x_0 = 1$ jmenovatel nulovy, tedy musime volit jine x_0, napr. $x_0 = 1/2$.

---

2. Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lineárně nezávislými řádky.

   (a) **(3b)** Najděte vzorec pro ortogonální projektor na nulový prostor matice $\mathbf{A}$.
   Ze skript známe vzorec pro projektor na podprostor daný bází. Když řádky $\mathbf{A}$ budou ta báze, pak $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$ bude projektor na $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T = (\operatorname{null}\mathbf{A})^\perp$. Projektor na $\operatorname{null}\mathbf{A}$ tedy bude $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$.

   (b) **(1b)** Napište tento projektor pro případ $\mathbf{A} = [2 \quad -1]$ (tedy $\mathbf{A}$ má jediný řádek). $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

   (c) **(1b)** Jaký bude tento projektor pro případ $m = n$? Bude možné vzorec nějak zjednodušit?
   Pak bude $\mathbf{A}$ regularni a jeji nulovy prostor je $\{\mathbf{0}\}$. Tedy projektor bude nulova matice $\mathbf{0}$ rozmeru $n \times n$. To vyjde i dosazenim do vzorecku vyse, protoze diky regularite $\mathbf{A}$ mame $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}\mathbf{A}^{-1}$.

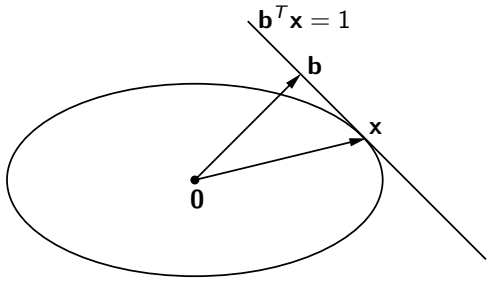
3. Minimalizujeme funkci $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{b}^T\mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{A}$ je daná symetrická positivně definitní matice, $\mathbf{b}$ je daný normalizovaný vektor a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou proměnné.

   (a) **(2b)** Popište vlastnosti účelové funkce úlohy. Jak se nazývá? Je konvexní? Jak se nazývají její vrstevnice?
   Funkce je positivně definitní kvadratická forma, tedy je konvexní (např. dle Věty 16.5. ve skriptech). každá její vrstevnice kladné výšky je povrch elipsoidu (trochu nesprávně můžeme říct i elipsoid).

   (b) **(1b)** Jak se nazývá množina přípustných řešení úlohy? Je tato množina konvexní?
   Účelová funkce je konvexní protože $\mathbf{A}$ je positivně definitní. Množina přípustných řešení je nadrovina, tedy konvexní množina. Tedy úloha je konvexní.

   (c) **(3b)** Úlohu vyřešte (výsledkem bude vzorec pro optimální řešení $\mathbf{x}$). Pokud optimální řešení neexistuje, odůvodněte. Pokud existuje, odůvodněte, proč je to globální minimum úlohy (a ne např. lokální maximum).
   Lagr. funkce $L(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda(1 - \mathbf{b}^T\mathbf{x})$. Podmínka 1. řádu (kromě omezující podmínky) je $L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^T\mathbf{A} - \lambda\mathbf{b}^T = \mathbf{0}$. Protože $\mathbf{A}$ je pos. definitní a tudíž regulární, máme z toho $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Dosazením do omezení dostaneme $\lambda\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = 1$, z toho vyjádříme λ a dosadíme do $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}{\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$. Protože úloha je konvexní, je to globální minimum.

   (d) **(3b)** Nakreslete situaci pro $n = 2$ pro nějaké vámi zvolené $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$ (kde matici $\mathbf{A}$ nevolte diagonální). Nemusíte psát numerické hodnoty $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$, stačí jen kvalitativní správnost obrázku. Na obrázku bude počátek (tj. bod $\mathbf{0}$), vektor $\mathbf{b}$, množina přípustných řešení úlohy, optimální vektor $\mathbf{x}$ a vrstevnice účelové funkce procházející bodem $\mathbf{x}$. Pokud jsou nějaké dvojice objektů kolmé či rovnoběžné, vyznačte to standardními značkami pro kolmost/rovnoběžnost.
   Vše kreslíme v rovině $\mathbb{R}^2$. Množina přípustných řešení $\{\,\mathbf{x} \mid \mathbf{b}^T\mathbf{x} = 1\,\}$ je přímka kolmá na vektor $\mathbf{b}$ a procházející bodem $\mathbf{b}$ (tedy špičkou vektory $\mathbf{b}$). Vrstevnice (různých kladných výšek) účelové funkce jsou 'soustředné' elipsy. Optimální bod $\mathbf{x}$ bude procházet vrstevnící s nejnižší možnou výškou, která ještě má s přímkou neprázdný průnik. To bude elipsa, která se přímky právě dotýká, tedy je k ní tečná.



---

4. **(3b)** Chceme zjistit, zda funkce $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{1}^T\mathbf{x}| = |x_1 + \cdots + x_n|$ je vektorová norma. Za tímto účelem pro každý z axiomů normy uveďte, zda jej funkce f splňuje či nesplňuje, a každou odpověď dokažte.

   Axiomy normy jsou ve skriptech v §12.4.1.

   Pro $n \geq 2$ nesplnuje axiom $f(\mathbf{x}) = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$, protipriklad pro $n = 2$ je $\mathbf{x} = (1, -1)$.

   Axiom positivni homogenity $f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x})$ splnuje. Dukaz: $f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha\mathbf{1}^T\mathbf{x}| = |\alpha|\,|\mathbf{1}^T\mathbf{x}| = |\alpha| f(\mathbf{x})$.

   Trojuhelnikovou nerovnost $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ splnuje. Dukaz: $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |\mathbf{1}^T(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = |\mathbf{1}^T\mathbf{x} + \mathbf{1}^T\mathbf{y}| \leq |\mathbf{1}^T\mathbf{x}| + |\mathbf{1}^T\mathbf{y}| = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, protoze pro kazde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ plati $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

---

5. Máme množinu $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{x, y\} \leq 1\,\}$.

   (a) **(2b)** Načrtněte tuto množinu.
   Mnozina je sjednoceni polorovin $x \leq 1$ a $y \leq 1$.

   (b) **(2b)** Je tato množina konvexní? Odpověď dokažte z definice konvexní množiny (požadujeme algebraický důkaz, tedy nestačí např. geometrické odůvodnění odvolávající se na obrázek).
   Není konvexní, nutno najít protipříklad porušující definici konvexní množiny (vyraz (13.1) ve skriptech). Ten snadno najdeme v obrazku. Napr. body $(x, y) = (1, 2)$ a $(x', y') = (2, 1)$ oba patri do mnoziny (splnuji nerovnost $\min\{x, y\} \leq 1$). Kdyz ale zvolime $\alpha = \frac{1}{2}$, tak bod $(1 - \alpha)(x, y) + \alpha(x', y') = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ v mnozine nelezi.

6. Pro dané číslo $c \in \mathbb{R}$ hledáme nezáporné číslo $x \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota výrazu $|c - x|$ byla co nejmenší.

   (a) **(1b)** Najděte (pokud možno jednoduchý) vzorec pro optimální hodnotu (nikoliv argument) této úlohy.
   Pokud $c \geq 0$, tak zvolime $x = c$ a opt hodnota je 0. Pokud $c \leq 0$, zvolime $x = 0$ a opt hodnota je $|c| = -c$. Pro oba tyto pripady se opt hodnota da napsat jednoduse jako $\max\{0, -c\}$.

   (b) **(1b)** Je tato úloha lineární program? Pokud není, převeďte ji na lineární program. Pokud převod není možný, odůvodněte a další úkoly už nedělejte.
   $\min z$ za podm. $c - x \leq z$, $-c + x \leq z$, $x \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$

   (c) **(2b)** Napište k tomuto lineárnímu programu duální úlohu.

$$\begin{array}{rl} \min & z \\ \text{za podm.} & x + z \geq c \\ & -x + z \geq -c \\ & x \geq 0 \\ & z \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & c(u - v) \\ \text{za podm.} & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \\ & u - v \leq 0 \\ & u + v = 1 \end{array}$$

   (d) **(1b)** Napište optimální primární řešení a optimální duální řešení pro $c = 1$.
   $x = z = 1$, $u = v = \frac{1}{2}$

   (e) **(1b)** Napište optimální primární řešení a optimální duální řešení pro $c = -2$.
   $x = 0$, $z = 2$, $u = 0$, $v = 1$

---

7. **(3b)** Zemědělec má 10 ha pole na výsadbu pšenice a žita a chce osázet nejméně 7 ha. Má k dispozici 120 tis. Kč a celou výsadbu chce stihnout za ne více než 12 hodin. Osázení jednoho hektaru pšenice stojí 20 tis. Kč a trvá jednu hodinu. Osázení jednoho hektaru žita stojí 10 tis. Kč a trvá dvě hodiny. Pokud je zisk 50 tis. Kč za hektar pšenice a 30 tis. Kč za hektar žita, kolik pšenice a žita má zemědělec vysázet pro co největší zisk? Úlohu napište jako lineární program (který už ale neřešte).

   Zadání jde pochopit dvěma způsoby, oba jsou správné. Buď se náklady na výsadbu neodčítají ze zisku, pak maximalizujeme $50x + 30y$ z.p. $7 \leq x + y \leq 10$, $20x + 10y \leq 120$, $x + 2y \leq 12$, $x, y \geq 0$.

   Nebo se náklady na výsadbu odčítají ze zisku (tedy nevyčerpaný zbytek ze 120 tisíc si můžeme nechat), pak maximalizujeme $(50 - 20)x + (30 - 10)y$ za stejných podmínek.

---

8. Chceme ručně spočítat redukovaný singulární rozklad matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Postupujte v těchto krocích:

   (a) **(2b)** Spočítejte singulární čísla matice $\mathbf{A}$ (postup nestačí, spočítejte je numericky).
   Hledáme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mají ortonormální sloupce a $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je diagonální s diagonálními prvky s_1, s_2. Využijeme vztah se spektrálním rozkladem: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{S}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}^2\mathbf{U}^T$. Podle tohoto vzorce jsou singulární čísla matice $\mathbf{A}$ rovna odmocnině vlastních čísel matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Tato vlastní čísla jsou řešením rovnice $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, tedy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Tedy $s_1 = 1$, $s_2 = \sqrt{6}$.

   (b) **(2b)** Spočítejte levé singulární vektory matice $\mathbf{A}$ (postup nestačí, spočítejte je numericky).
   Ze vzorce výše plyne, že singulární vektory matice $\mathbf{A}$ jsou normalizované vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Ty spočítáme z homogenní lineární soustavy $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}$. Pro $\lambda = \lambda_1$ máme $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{u}_1 = (2, 1)/\sqrt{5}$ (až nba násobení mínus jedničkou). Pro λ_2 máme $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, tedy např. $\mathbf{u}_2 = (-1, 2)/\sqrt{5}$.

   (c) **(1b)** Nakonec dopočítejte celý redukovaný singulární rozklad matice $\mathbf{A}$ (nemusíte numericky, stačí postup).
   Matici $\mathbf{S}$ máme. Matici $\mathbf{U}$ také, její sloupce jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ (zkontrolujte, že $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$, jak má být). Zbývá dopočíst matici $\mathbf{V}$ ze vzorce $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$. Protože je $\mathbf{U}$ ortogonální a $\mathbf{S}$ diagonální regulární, je $\mathbf{V}^T = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{A}$, tedy $\mathbf{V} = \mathbf{A}^T\mathbf{U}\mathbf{S}^{-1}$.
   I když to není povinné, dopočítáme to i numericky:
   $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$.