OPT zk–počít 9.2.2023 **Jméno:** **Příjmení:**

Příklady na této a další stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery.

1. Máme dvě křivky v rovině: množinu $P = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\,\}$ a kružnici o poloměru 1 se středem v bodě $(3,0)$. Najděte bod množiny P, který je nejblíže ke kružnici.

   a) (2b) Zformulujte tuto optimalizační úlohu. Pokud je možných více formulací, vyberte tu nejvýhodnější na řešení.
   b) (2b) Úlohu vyřešte: najděte všechna optimální řešení a dokažte, že jich víc není. (Nápověda: Pokud řešení povede na kořeny polynomu vyššího než druhého stupně, nevyděste se a přemýšlejte.)

Množina P je parabola. Vzdálenost od kružnice je rovna vzdálenosti od jejího středu minus poloměr. Tedy hledáme bod na parabole nejbližší k bodu $(3,0)$. Tedy minimalizujeme $(x-3)^2+y^2$ za podmínky $y=x^2$, tedy minimalizujeme $(x-3)^2+x^4$. Stacionární bod: $2(x-3)+4x^3=0$, tedy $2x^3=3-x$. To je sice kubická rovnice, ale uhodneme řešení $x=1$. Pokud by někdo pochyboval, že toto řešení je jediné, stačí si nakreslit křivky $y=2x^3$ a $y=3-x$ a vidíme, že jiný průnik nemají. Optimální bod na parabole je tedy $(x,y)=(1,1)$.

2. Minimalizujeme funkci $f(x,y) = |x-y+1| + |x+y-2|$ za podmínek $x,y \geq 0$.

   a) (2b) Je tato optimalizační úloha konvexní? Odpověď dokažte (smíte použít libovolné věty dokázané ve skriptech).
   Úloha je konvexní, když je množina přípustných řešení konvexní a účelová fce je konvexní. Příp. množina je zjevně konvexní, protože to je množina $\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$, tedy nezáporný kvadrant. Úč. fce je konvexní, protože např. $|x-y+1| = \max\{-x+y-1, x+y-1\}$ je maximum afinnich funkci, coz je konvexni fce. A soucet konvexnich fci je konv. fce.
   b) (2b) Transformujte úlohu na lineární program. Pokud myslíte, že to nejde, odůvodněte a následující úkol nedělejte.
   Minimaluzuj $u+v$ za podminek $x-y+1 \leq u$, $-x+y-1 \leq u$, $x+y-2 \leq v$, $-x-y+2 \leq v$, $x,y \geq 0$, $u,v \in \mathbb{R}$.
   c) (2b) Napište k tomuto lineárnímu programu duální úlohu.
   Mechanicky dle postupu ve skriptech, psat to sem nebudu.

---

3. (2b) Hledáme lokální maximum funkce $f(p,q) = (p^2+q^2)\sin(p-q)$. Napište iteraci Newtonovy metody. (Pokud se ve vzorci vyskytnou derivace, spočítejte je. Případnou inverzi počítat nemusíte.)
   Iterace je $(p_{k+1}, q_{k+1}) = (p_k, q_k) - f''(p_k,q_k)^{-1} f'(p_k,q_k)^T$.
   Jacobiho matice je $f'(p,q) = [\,2p\sin(p-q) - (p^2+q^2)\cos(p-q) \quad 2q\sin(p-q) + (p^2+q^2)\cos(p-q\,]$.
   Hessova matice $f''(p,q)$ je matice 2×2, nemusela se explicitne pocitat, vyjde dost dlouha.

4. Hledáme extrémy funkce $x + 2y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 4x + 1$.

   a) (2b) Najděte všechny kandidáty na extrémy metodou Lagrangeových multiplikátorů.
   Klasicke pouziti metody Lagr. mult., jen se musi umet vyresit vznikla soustava 3 nelinearnich rovnic o 3 neznamych x, y, λ. Jsou dve reseni (po zahozeni λ): $(x, y) = (1, -2)$ a $(x, y) = (3, 2)$. To jsou kandidaty.

   b) (2b) Nakreslete obrázek, kde bude množina přípustných řešení, všechny nalezené kandidáty na extrémy a vrstevnice účelové funkce procházející jedním vybraným kandidátem.
   Aby se zjistilo, jak vypada mnozina prip. reseni, je treba doplnit fci v podmince na ctverec, tedy $x^2 + y^2 - 4x - 1 = (x - 2)^2 + y^2 - 5$. Ted se vidi, ze prip. mnozina je kruznice se stredem $(2, 0)$ a polomerem $\sqrt{5}$. Vrstevnice pak budou kolmice k vektoru $(1, 2)$, budou tecne k te kruznici.

   c) (1b) Úvahou rozhodněte o každém kandidátu, zda je to extrém a případně jaký (lokální/globální, minimum/maximum).

---

5. Dokažte následující dvě tvrzení: Pro každou matici $\mathbf{A}$ (s reálnými prvky) a každé kladné číslo t je matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T + t\mathbf{I}$

   a) (2b) positivně definitní,
   Z definice pos. definitnosti musime dokazat, ze pro kazde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ plati $\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + t\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x} + t\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$. Je $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{x})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\|^2 \geq 0$ pro vsechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (tato finta byla ve skriptech, na prednaskach a na cvicenich), neboli matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je pos. semidefinitni. Protoze $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ pro vsechna $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (zadny nenulovy vektor neni kolmy sam na sebe), jsme hotovi.

   b) (1b) regulární.
   Zde by stacilo napsat, ze kazda pos. definitni matice je regularni – to bychom uznali i bez dukazu. Dukaz (ve skriptech) je napr. takto: pos. def. matice ma spektralni rozklad $\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T$ kde vsechna vlastni cisla (diagonalni prvky matice Λ) jsou kladna a tedy matice Λ je regularni a tedy matice $\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T$ je regularni protoze $\mathbf{V}$ jsou ortogonalni.

---

6. Máme množinu $X = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \,\}$.

   a) (2b) Parametrizujte množinu jako $X = \{\, \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\}$ (tj. najděte $n, \mathbf{A}, \mathbf{b}$). Pokud to nejde, odůvodněte.
   Zde jste skoro vsichni bez premysleni napsali $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, coz je spatne. Je totiz rozdil, jestli napiseme $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,\}$ a nebo $\{\, \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\}$, to jsou dve uplne jine mnoziny. Obe reprezentuji afinni podprostor, ale jedna jako mnozinu reseni soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, druha jako podprostor $\operatorname{rng}\mathbf{A}$ (protoze $\{\, \mathbf{A}\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$) posunuty o vektor $\mathbf{b}$. Ukolem bylo prevest prvni reprezentaci na druhou.
   Reseni: Mnozina X je mnozina reseni linearni soustavy $\{\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \,\}$. Tuto mnozinu chceme vyjadrit jako nulovy prostor matice soustavy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ plus partikularni reseni soustavy $\mathbf{b}$ (ktere se obvykle znaci $\mathbf{x}_0$, coz vas asi spletlo). Protoze $\{\, \mathbf{A}\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$, tedy sloupce $\mathbf{A}$ musi tvorit bazi toho nuloveho prostoru. Partikularni reseni je napr. $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$. Nulovy prostor ma dimenzi $n = 1$ (mnozina reseni soustavy je primka) a jeho baze je napr. $\{(3, -4, 5)\}$. Tedy je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Pro prehlednost shrneme:

$$X = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \,\} = \{\, \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

   b) (2b) Jaká je vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ od množiny X?
   Tu muzeme pohodlne spocitat z vysledku vyse, kde jsme vsechny body mnoziny X vyjadrili jako $(3, -4, 5)y + (1, 0, 0)$ pro vsechna mozna $y \in \mathbb{R}$. Ctverec vzdalenosti tohoto bodu k bodu $\mathbf{z}$ je tedy $\|(3, -4, 5)y + (1, 0, 0) - (0, 0, 1)\|^2 = (3y + 1)^2 + (-4y)^2 + (5y - 1)^2$. To musime minimalizovat pres $y \in \mathbb{R}$. To vyresime polozenim derivace podle y rovne nule. Vyjde $y = 1/25$ a ctverec vzdalenosti je $48/25 = 1.92$.