Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. (10 b) Určete rank-minimální SVD v maticovém tvaru pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Řešení:

Myšlenka: matice vpravo je součtem dyád a ty zkusíme vyjádřit pomocí ortonormálních vektorů. Povšimneme si, že všechny dvojice sloupcových vektorů jsou ortogonální. Stačí je tedy normalizovat, pišme:

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,1,0), \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0).$$

Pak platí

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T - 6\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T + 4\mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T.$$

Klaďme $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$, takto definované vektory tvoří ortonormální bázi. Potom z vyjádření

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + 6\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T + 4\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T$$

vyčteme levé/pravé singulární vektory a singulární čísla. Rank-minimální SVD rozklad matice $\mathbf{A}$ tvoří matice

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_1\end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1\end{bmatrix}, \mathbf{S} = \mathrm{diag}(6,4,2),$$

protože matice $\mathbf{A}$ má hodnost 3 (všechna 3 singulární čísla kladná).

2. Z dat odhadujte regresní model tvaru $y \approx \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry.

x_1	x_2	y
1	2	6
2	0	8
3	1	11

(a) (5 b) Formulujte úlohu jako problém nejmenších čtverců a ten vyřešte numericky.

(b) (5 b) Místo kritéria nejmenších čtverců použijeme minimální součet absolutních odchylek $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - y|$. Pokud lze, napište tuto úlohu jako lineární program.

Řešení:

(a) Minimalizujeme $\|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}\|_2^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Jelikož má $\mathbf{A}$ plnou sloupcovou hodnost, úloha má jediné řešení, a to je řešením soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Dostaneme

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 55 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Jediné řešení je

$$\alpha_1 = \frac{32}{9} \doteq 3.56, \qquad \alpha_2 = \frac{47}{45} \doteq 1.04.$$

(b) Úlohu lze formulovat jako LP. Minimalizujeme $z_1 + z_2 + z_3$ za podmínek

$$-z_1 \le \alpha_1 + 2\alpha_2 - 6 \le z_1, \quad -z_2 \le 2\alpha_1 - 8 \le z_2, \quad -z_3 \le 3\alpha_1 + \alpha_2 - 11 \le z_3,$$

kde $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ jsou neznámé hledané parametry, $z_1, z_2, z_3 \ge 0$ jsou přidané proměnné.

3.

(a) (6 b) Najděte minimum funkce x^2+y+z^2 na průniku dvou nadrovin v $\mathbb{R}^3$. První nadrovina má normálový vektor $(1, 0, 1)$ a druhá $(2, 1, 0)$. Obě nadroviny procházejí bodem $(1, 0, 2)$.

(b) (1 b) Je funkce z (a) pozitivně definitní kvadratická forma?

(c) (3 b) Vzorec pro nalezení minima funkce f na afinním podprostoru M v $\mathbb{R}^n$ vyjádřete obecně za předpokladu, že funkce f je pozitivně definitní kvadratická forma daná symetrickou maticí $f = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$ a $M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, kde $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky. Vámi nalezený vzorec pro argument minima bude obsahovat jen matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ a vektor $\mathbf{b}$ a operace s maticemi.

Řešení:

(a) První nadrovina má rovnici $x + z = b_1$ a druhá $2x + y = b_2$. Protože obě procházejí bodem $(1, 0, 2)$, musí $b_1 = 3$ a $b_2 = 2$. Hledáme tedy minimum zadané funkce za podmínky dané soustavou dvou lineárních rovnic. Z první rovnice eliminujeme x a máme $x = 3 - z$ a z druhé eliminujeme y a máme $y = 2 - 2(3 - z) = 2z - 4$. Funkce $x^2 + y + z^2$ po eliminaci

těchto proměnných přechází na tvar $(3-z)^2+2z-4+z^2=2z^2-4z+5$. Její derivace je $4z-4$ a stacionární bod je v bodě $z=1$. Je to minimum, protože funkce v proměnné z je kvadratická s kladným koeficientem u z^2. Po dosazení x a y máme odpověď, že funkce nabývá minimum v bodě $(2,-2,1)$.

Jiné řešení. Přímka kolmá ne zadané normálové vektory procházející zadaným bodem má parametrickou rovnici $(1,0,2)+t(-1,2,1)$ a je průnikem těch dvou nadrovin (Směrový vektor přímky jsme spočítali např. jako vektorový součin). Zadaná funkce na této přímce má hodnoty $(1-t)^2+2t+(2+t)^2=2t^2+4t+5$. Její minimum je v bodě $t=-1$. Dosazením tohoto výsledku do parametrického vyjádření přímky máme řešení $(2,-2,1)$.

Úloha se dá také řešit pomocí Lagrangeových multiplikátorů:
$L=x^2+y+z^2+\lambda_1(x+z-3)+\lambda_2(2x-y-2), \quad L'=\mathbf{0}$.

(b) Není to kvadratická forma, je to kvadratická funkce ve tvaru součtu pozitivně semidefinitiní kvadratické formy a lineární funkce.

(c) $\mathbf{x}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$. Viz cvičení 11.18 ze skript Optimalizace [Werner] a postup řešení je uveden ve Sbírce některých řešení ze skript Optimalizace [Olšák].

4. (10 b) Hledáme přibližné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\sin x - y &= 0\,,\\ x^2 - y + 1 &= 0\,,\end{aligned}$$

optimální podle kritéria nejmenších čtverců. Popište (a) Gaussovu-Newtonovu metodu, (b) Newtonovu metodu a udělejte jimi 1 krok z počátečního odhadu $(0,1)$. Vyhodnoťte kritérium před a po 1. kroku.

Řešení:

Zobrazení a jeho derivace:

$$\mathbf{h}(x,y)=\begin{bmatrix}\sin x - y\\ x^2-y+1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}'(x,y)=\begin{bmatrix}\cos x & -1\\ 2x & -1\end{bmatrix},$$
$$h_1''(x,y)=\begin{bmatrix}-\sin x & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad h_2''(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

Kritérium:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\tfrac12\|\mathbf{h}(x,y)\|^2=\tfrac12\big(\sin^2x-2y\sin x+x^4-2x^2y+2x^2+2y^2-2y+1\big)\,,\\ f'(x,y)&=\tfrac12(2\sin x\cos x-2y\cos x+4x^3-4xy+4x\,,\ -2\sin x-2x^2+4y-2)^{\mathsf T}=,\\ &=(\sin x\cos x-y\cos x+2x^3-2xy+2x\,,\ -\sin x-x^2+2y-1)^{\mathsf T}\,,\\ f''(x,y)&=\begin{bmatrix}\cos^2x-\sin^2x+y\sin x+6x^2-2y+2 & -\cos x-2x\\ -\cos x-2x & 2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$$\mathbf{h}(0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}'(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$h_1''(0,1) = \mathbf{0}, \qquad h_2''(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Kritérium:

$$f(0,1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},$$
$$f'(0,1) = (-1,1)^\mathsf{T},$$
$$f''(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$(f''(0,1))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gaussova-Newtonova metoda:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \left(\mathbf{h}'(x_0,y_0)^\mathsf{T}\,\mathbf{h}'(x_0,y_0)\right)^{-1}\mathbf{h}'(x_0,y_0)^\mathsf{T}\,\mathbf{h}(x_0,y_0) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$f(1,1) \doteq \mathbf{0.5126}.$$

Pseudoinverze:

$$\left(\mathbf{h}'(x_0,y_0)^\mathsf{T}\,\mathbf{h}'(x_0,y_0)\right)^{-1}\mathbf{h}'(x_0,y_0)^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Newtonova metoda:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - (f''(x_0,y_0))^{-1}\,f'(x_0,y_0)^\mathsf{T} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$f(1,1) \doteq \mathbf{0.5126}.$$

Bez vynásobení 1/2 by kritériem byl součet čtverců odchylek, $2f(1,1) \doteq \mathbf{1.025}$. Zde první krok nevedl ke zlepšení kritéria.