Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. (10 b) Určete přímku minimalizující součet čtverců vzdáleností od bodů $(0,1)$,$(-1,-1)$, $(-2,0)$. Stanovte chybu proložení a vzdálenosti zadaných bodů od optimální přímky.

Řešení:

Řešíme jako úlohu PCA, protože hledáme afinní podprostor dimenze 1 (přímku) minimalizující součet čtverců vzdáleností zadaných bodů od jejich kolmých projekcí na ten podprostor. Spočteme těžiště těch bodů, to je vektor $(-1,0)$. Matice vycentrovaných bodů je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 1$. Vlastní vektor příslušný λ_1 je např. $\mathbf{v}_1 = (1,1)$. Hledaná přímka má tedy tvar

$$(-1,0) + \alpha(1,1) \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chyba proložení je $\lambda_2 = 1$. Vzdálenost prvního z těch bodů je 0. Zbylé vzdálenosti určíme snadno. Součet čtverců vzdáleností je 1 a oba body jsou stejně daleko (obrázek), potom každý ze zbývajících bodů má vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (10 b) Firma vyrábí dva druhy produktů pomocí strojů A a B. Kus prvního produktu se vyrábí 2 hodiny na stroji A a 1 hodinu na stroji B, podobně se kus druhého produktu vyrábí 1 hodinu na stroji A a 3 hodiny na stroji B. Stroj A má kapacitu max. 100 hodin týdně a stroj B max. kapacitu 90 hodin týdně. Firma chce vyrábět minimálně 20 kusů prvního produktu a 10 kusů druhého produktu týdně, přičemž jednotkové náklady na první produkt jsou 500 Kč a jednotkové náklady na druhý produkt jsou 400 Kč.

   Určete množství vyráběných kusů minimalizující celkové výrobní náklady za týden, přičemž tuto úlohu formulujete jako lineární program. Napište duální úlohu obsahující jen nezáporné proměnné a nalezněte její optimální řešení.

Řešení:

$\min 500x_1 + 400x_2$ za podmínek $2x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 + 3x_2 \leq 90$, $x_1 \geq 20$, $x_2 \geq 10$. Snadno nahlédnemé (obrázek), že množina přípustných řešení je konvexní polytop s vrcholy $(20, 10), (45, 10), (42, 16), (20, \frac{70}{3})$. Minimum je v bodě $(20, 10)$ a má hodnotu 14000.

Duál je $\max -100y_1 - 90y_2 + 20y_3 + 10y_4$ při omezení $y_i \geq 0$, kde $i = 1, \ldots, 4$, a dále $-2y_1 - y_2 + y_3 \leq 500$, $-y_1 - 3y_2 + y_4 \leq 400$. Podle silné duality je hodnota v optimu 14000. Podle podmínek komplementarity je v optimu duálu nutně $y_1 = y_2 = 0$ a $y_3 = 500$, $y_4 = 400$.

3. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{d} = (4, 9, 7, 7)$. Označme dále $M = \operatorname{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.
   (a) (5 b) Najděte $\mathbf{v} \in M$ tak, aby eukleidovská vzdálenost $\mathbf{d}$ od $\mathbf{v}$ byla minimální.
   (b) (5 b) Výsledek $\mathbf{v}$ z kroku (a) vyjádřete v souřadnicích báze $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ podprostoru M.

Řešení:

(a) Vyřešením homogenní soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dostaneme například $\mathbf{x} = (-1, 2, 1, -1)$, což je vektor kolmý na M. Na přímku generovanou vektorem $\mathbf{x}$ promítneme kolmo vektor $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{d} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{r}$$

Řešením úlohy je kolmá projekce vektoru $\mathbf{d}$ do M. Zatím máme jeho rejekci $\mathbf{r}$. Kolmá projekce je tedy rovna $\mathbf{d} - \mathbf{r} = (6, 5, 5, 9)$.

(b) Nehomogenní soustava

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

má jediné řešení, protože matice soustavy má lineárně nezávislé sloupce, které generují M a pravá strana soustavy leží v M. Řešení této soustavy je $\mathbf{s} = (1, 2, 3)$, což jsou hledané souřadnice.

Jiné řešení. Označíme-li $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}$, pak vyřešením přeurčené soustavy $\mathbf{Au} = \mathbf{d}$ ve smyslu nejmenších čverců dostaneme ve složkách $\mathbf{u}$ souřadnice hledaného vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, tedy odpověď na otázku b). Je to z toho důvodu, že $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$ je levá strana soustavy, která po vyřešení bude nejblíže pravé straně $\mathbf{d}$. Normální soustava $\mathbf{A}^T\mathbf{Au} = \mathbf{A}^T\mathbf{d}$ má tvar

$$\begin{bmatrix}6 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 7\end{bmatrix}\mathbf{u} = \begin{bmatrix}25\\ 20\\ 34\end{bmatrix}$$

a její řešení je $\mathbf{u} = (1.2.3)$. K odpovědi na a) pak vede výpočet $\mathbf{v} = 1\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c} = (6, 5, 5, 9)$.

Jiné způsoby řešení, např. modifikace báze $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ otrogonalizačním procesem a následné použití projektoru $\mathbf{UU}^T$ nebo použití vzorce $\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d}$ je sice správné, ale pro počítání na papíře neefektivní. Úkolem bylo mimo jiné použít metodu efektivní v rámci možností, které jste měli k dispozici, což byl papír a tužka.

4. (10 b) Najděte všechny globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + x^2y + 2xz - x - 3y + z^2$ na jednotkové krychli $[-1, 1]^3$ a funkční hodnoty v nich.

Řešení:

Poznámka. Detailní numerické řešení vyžaduje diskusi více speciálních případů. Správný postup je ten, který rozpozná nutnost hledat extrémy na stěnách krychle a zároveň popíše způsob, jakým je za daných omezení najdeme.

Derivace

$$f'(x, y, z) = (3x^2 + 2xy + 2z - 1, \underbrace{x^2 - 3}_{<0}, 2x + 2z)^{\mathsf{T}}$$

má v daném oboru druhou složku vždy zápornou, tedy funkce f je klesající v y. Má smysl hledat pouze minimum pro $y = 1$ a maximum pro $y = -1$, optimalizací přes x, z. Má-li být třetí složka f' nulová, musí být $z = -x$, což můžeme později dosadit do rovnice pro první složku. Musíme to však řešit jako extrémy funkce dvou proměnných.

Pro $y = -1$: Funkce

$$f_1(x, z) = f(x, -1, z) = x^3 - x^2 + z^2 + 2xz - x + 3$$

má derivace

$$f_1'(x, z) = [3x^2 - 2x + 2z - 1, 2x + 2z]\,,$$
$$f_1''(x, z) = \begin{bmatrix}6x - 2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Stacionární body na ploše $y = -1$ jsou stacionární body funkce

$$g_1(x) = f(x, -1, -x) = x^3 - 2x^2 - x + 3\,.$$

Kořeny její derivace

$$g_1'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

jsou

$$\frac{2+\sqrt{7}}{3} \doteq 1.5485837700\,,$$
$$\frac{2-\sqrt{7}}{3} \doteq -0.2152504369\,,$$

do daného oboru spadá jen druhý z nich, tam je ovšem druhá derivace

$$f_1''\Big(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, -\frac{2-\sqrt{7}}{3}\Big) = \begin{bmatrix} 6\big(\frac{2-\sqrt{7}}{3}\big) - 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -3.29 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

indefinitní, je to sedlový bod funkce f_1.

Ve vrcholech krychle najdeme nejvyšší hodnoty

$$f(-1,-1,-1) = f(1,-1,1) = 5\,.$$

Zbývá posoudit vnitřky hran.

1. $x = 1$:

$$h_{11}(z) = f(1,-1,z) = z^2 + 2z + 2\,,$$
$$h_{11}'(z) = 2z + 2 \geq 0\,.$$

2. $x = -1$:

$$h_{12}(z) = f(-1,-1,z) = z^2 - 2z + 2\,,$$
$$h_{12}'(z) = 2z - 2 \leq 0\,.$$

3. $z = 1$:

$$h_{13}(x) = f(x,-1,1) = x^3 - x^2 + x + 4\,,$$
$$h_{13}'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \geq 0\,.$$

4. $z = -1$:

$$h_{14}(x) = f(x,-1,-1) = x^3 - x^2 - 3x + 4\,,$$
$$h_{14}'(x) = 3x^2 - 2x - 3\,.$$

   Derivace je nulová pro

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}\,,$$

do daného oboru spadá jen

$$x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \doteq -0.72\,,$$

s funkční hodnotou

$$f\Big(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, -1, -1\Big) \doteq 5.268\,.$$

To je jediné globální maximum.

Pro $y = 1$: Funkce

$$f_2(x,z) = f(x,1,z) = x^3 + x^2 + z^2 + 2xz - x - 3$$

má derivace

$$f_2'(x,z) = [3x^2 + 2x + 2z - 1, 2x + 2z]\,,$$
$$f_2''(x,z) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stacionární body na ploše $y = 1$ jsou stacionární body funkce

$$g_2(x) = f(x,1,-x) = x^3 - x - 3\,.$$

Kořeny její derivace

$$g_2'(x) = 3x^2 - 1$$

jsou $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Lokální minimum funkce g_2 je v $\frac{1}{\sqrt{3}}$ a má hodnotu přibližně -3.38. Druhá derivace

$$f_2''\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 5.46 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

je pozitivně definitní, je to lokální minimum funkce f_2.

Ve vrcholech krychle najdeme nejnižší hodnoty

$$f(-1,1,1) = f(1,1,-1) = -3\,.$$

Zbývá posoudit vnitřky hran.

1. $x = 1$:

$$h_{21}(z) = f(1,1,z) = z^2 + 2z - 2\,,$$
$$h_{21}'(z) = 2z + 2 \geq 0\,.$$

2. $x = -1$:

$$h_{22}(z) = f(-1,1,z) = z^2 - 2z - 2\,,$$
$$h_{22}'(z) = 2z - 2 \leq 0\,.$$

3. $z = 1$:

$$h_{23}(x) = f(x, 1, 1) = x^3 + x^2 + x - 2\,,$$
$$h'_{23}(x) = 3x^2 + 2x + 1 \geq 0\,.$$

4. $z = -1$:

$$h_{24}(x) = f(x, 1, -1) = x^3 + x^2 - 3x - 2\,,$$
$$h'_{24}(x) = 3x^2 + 2x - 3\,.$$

Derivace je nulová pro

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}\,,$$

do daného oboru spadá jen

$$x = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3} \doteq 0.72\,,$$

s funkční hodnotou

$$f\Big(\frac{-1 + \sqrt{10}}{3}, 1, -1\Big) \doteq -3.268\,.$$

Jediné globální minimum je v bodě $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *a má hodnotu přibližně* -3.38.