Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Uvažujte funkci
$$f(x, y) = \max\{x + y, x - y, 2y - x\}$$
s definičním oborem $\mathbb{R}^2$.
   (a) (2 b) Je f konvexní? Odpověď pečlivě zdůvodněte.
   (b) (2 b) Formulujte problém $\min\{f(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ jako úlohu lineárního programování, pokud je to možné.
   (c) (3 b) Napište duální úlohu, v níž jsou všechny proměnné nezáporné.
   (d) (3 b) Nalezněte optimální řešení primární úlohy z bodu (b).

Řešení:

(a) Funkce f je konvexní, protože je bodovým maximem z lineárních funkcí na $\mathbb{R}^2$.

(b) Hledáme minimum po částech afinní konvexní funkce f, což lze formulovat jako úlohu LP takto: $\min z$ za podmínek $x + y \leq z$, $x - y \leq z$, $2y - x \leq z$, kde proměnné jsou neomezené, tedy $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(c) Formulujme ekvivalentně primární program takto: $\min z$ za podmínek $-x - y + z \geq 0$, $-x + y + z \geq 0$, $x - 2y + z \geq 0$, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Z tohoto vyjádření přímo vyčteme duál s nezápornými proměnnými: $\max 0$ za podmínek $-u_1 - u_2 + u_3 = 0$, $-u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$, $u_1 + u_2 + u_3 = 1$, kde $u_1, u_2, u_3 \geq 0$ a účelová funkce je identicky rovna 0.

(d) Povšimneme si, že primární úloha je přípustná, protože $x = y = z = 0$ vyhoví podmínkám. Zároveň je vidět, že duální úloha není přípustná, neboť jediné řešení soustavy tří lineárních rovnic výše má jednu složku zápornou. Ze silné duality pak plyne, že primární úloha je nutně neomezená, tedy účelová funkce klesá neomezeně do $-\infty$.

2. (10 b) Vyřešte úlohu
$$\min\{\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2 \mid \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \operatorname{rank}(\mathbf{B}) \leq 2\}$$
pro matici
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nápověda. Řešením rovnic jsou vždy malá celá čísla.

Řešení:

Použijeme SVD matice $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, protože optimální řešení úlohy je tvaru

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{2} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Nalezneme spektrální rozklad matice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chceme řešit rovnici

$$(2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) + 2 = 0.$$

Položme $x = 2 - \lambda$, pak řešíme

$$x^3 - 3x + 2 = 0,$$

uhodneme kořen $x = 1$. Dělením polynomů dostaneme rozklad

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x-1)(x+2) = 0,$$

tedy 1 je dvojnásobný kořen a -2 je jednoduchý kořen, vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Odpovídající singulární čísla: $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 1$. Pravé singulární vektory matice $\mathbf{A}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, např.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Levé singulární vektory dopočítáme ze vztahu $\mathbf{u}_i = \frac{1}{s_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1).$$

Dostaneme

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1,0,0,1)$, $\mathbf{b} = (1,1,1,1)$, $\mathbf{c} = (2,1,1,2)$ a bod $D = (1,2,3,4)$. Uvažujte množinu $X = \operatorname{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.
   (a) (2 b) Najděte nějakou bázi podprostoru $X^\perp$ a stanovte dimenze podprostorů X a $X^\perp$.
   (b) (4 b) Najděte přímku p ležící v $X^\perp$, která prochází počátkem a je nejblíže bodu D. Uveďte směrový vektor této přímky. Najděte také souřadnice bodu na přímce p, který je nejblíže bodu D.

(c) (4 b) Najděte přímku q ležící v $X^\perp$, která prochází počátkem a má největší vzdálenost od bodu D. Uveďte směrový vektor této přímky.

Řešení:

(a) Báze X může být $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ a bázi $X^\perp$ najdeme řešením soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$, kde $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}$ a může to být třeba $\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$. Dimenze X i $X^\perp$ je rovna dvěma.

(b) Najdeme bod $C\in X^\perp$ který je nejblíže bodu D jako kolmou projekci vektoru $\mathbf{d}=(1,2,3,4)$ do $X^\perp$. Přímka p pak prochází počátkem a bodem C. Kolmou projekci můžeme spočítat pomocí $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$, kde $\mathbf{U}$ obsahuje ve sloupcích ortonormální bázi $X^\perp$. Tedy:

$$\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\qquad C=\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{d}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Přímku p tedy můžeme zapsat jako množinu $\{\mathbf{0}+t(-3,-1,1,3)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ a bod nejblíže bodu D je bod $C=(-3/2,\,-1/2,\,1/2,\,3/2)$.

Jiné řešení: vyjdeme z ortonormální báze X, $\mathbf{q}_1=1/\sqrt{2}\,(1,0,0,1)$, $\mathbf{q}_2=1/\sqrt{2}\,(0,1,1,0)$ a provedeme ortogonalizaci třetího vektoru $\mathbf{d}=(1,2,3,4)$ jako v kroku ortogonalizační metody. Protože výsledek kroku (označíme jej $\mathbf{v}$) zůstává ve $\operatorname{span}\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{d}\}$, je to vektor nejblíže vektoru $\mathbf{d}$. Je

$$\mathbf{v}=\mathbf{d}-(\mathbf{q}_1^T\mathbf{d})\mathbf{q}_1-(\mathbf{q}_2^T\mathbf{d})\mathbf{q}_2=(1,2,3,4)-\frac{5}{2}(1,0,0,1)-\frac{5}{2}(0,1,1,0)=\Big(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big).$$

Další možností řešení je hledání minima $\|\mathbf{x}-\mathbf{d}\|^2$ za podmínky $\mathbf{x}=(t,u,-u,-t)$. Po zderivování účelové funkce $(t-1)^2+(u-2)^2+(-u-3)^2+(-t-4)^2$ najdeme stacionární bod $t=-3/2$, $u=-1/2$, který je minimem účelové funkce.

(c) Z bodů nadroviny $\begin{bmatrix}1&2&3&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ je počátek nejblíže bodu $(1,2,3,4)$, ostatní body na této nadrovině mají větší vzdálenost, protože tato nadrovina je kolmá na $(1,2,3,4)$. Přímka q musí procházet počátkem bude tedy ležet v uvedené nadrovině, nejbližší bod na přímce q k bodu $(1,2,3,4)$ bude tedy počátek. Protože navíc $q\in X^\perp$, její body jsou řešením soustavy

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&2&3&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0},\qquad \text{jejím řešením je}\quad \mathbf{x}\in\{t\,(1,-3,3,-1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=q.$$

K výsledku lze dospět také úvahou. Největší vzdálenost bude mít $q\perp p$, takže směrový vektor q musí být kolmý na směrový vektor p a musí být tvaru $(t,u,-u,-t)$, protože musí ležet v $X^\perp$.

4. Ve čtverci $[-2,2]\times[-2,2]$ hledáme body s největší a nejmenší hodnotou kritéria, kterým je

součet kvadrátů vzdáleností od 3 přímek s rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= -1\,, \\ y &= -1\,, \\ 4x + 3y &= 1\,. \end{aligned}$$

(a) (3 b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda tyto extrémy existují (případně kolik jich může být).

(b) (6 b) Extrémy najděte.

(c) (1 b) Vyčíslete kritérium v nalezených extrémech (i přibližně numericky).

Řešení:

(a) Kritérium je spojité a hledáme extrémy na uzavřené omezené množině. Globální extrémy proto musí existovat. Kritérium je součet konvexních funkcí, je ryze konvexní. Na konvexní množině musí mít jediné minimum, a to uvnitř trojúhelníka, vymezeného danými přímkami. (Ten je celý v oblasti, přes kterou minimalizujeme.) Najde se jako jediný stacionární bod kriteriální funkce.

Z konvexity plyne, že maximum přes libovolnou úsečku může být jen v jejím krajním bodě. Proto stačí hledat maxima ve čtyřech vrcholech daného čtverce. (Kdo by hledal na stranách čtverce, měl by snadnou úlohu, ale nenajde víc.) Mohlo by být více globálních maxim.

(b) Vzdálenost od přímky v tomto tvaru dostaneme dosazením souřadnic bodu (x, y) a vydělením velikostí normálového vektoru sestaveného z koeficientů. To je v případě třetí přímky

$$\frac{4x + 3y - 1}{5}\,.$$

Dostáváme kritérium

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + \Big(\frac{4x+3y-1}{5}\Big)^2 = \\ &= \tfrac{1}{25}(41x^2 + 34y^2 + 24xy + 42x + 44y + 51)\,, \\ f'(x,y,z) &= \tfrac{1}{25}[82x + 24y + 42,\ 24x + 68y + 44]\,, \\ f''(x,y,z) &= \tfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 82 & 24 \\ 24 & 68 \end{bmatrix}\,. \end{aligned}$$

Matice $f''(x, y, z)$ je pozitivně definitní, v souladu s očekáváním.

Minimum nastává pro řešení soustavy

$$\begin{aligned} 82x + 24y + 42 &= 0\,, \\ 24x + 68y + 44 &= 0\,. \end{aligned}$$

kterým je bod

$$\Big(\frac{-9}{25}, \frac{-13}{25}\Big) = (-0.36, -0.52)\,.$$

Globální maxima mohou být jen ve vrcholech čtverce,

$$\begin{aligned} f(2,2) &= \frac{619}{25} = 24.76\,, \\ f(2,-2) &= \frac{251}{25} = 10.04\,, \\ f(-2,2) &= \frac{259}{25} = 10.36\,, \\ f(-2,-2) &= 11\,, \end{aligned}$$

globální maximum je v bodě $(2,2)$.

(c) Globální minimum

$$f\Big(\frac{-9}{25}, \frac{-13}{25}\Big) = \frac{32}{25} = 1.28\,,$$

globální maximum

$$f(2,2) = \frac{619}{25} = 24.76\,.$$