

Příjmení a jméno: \_\_\_\_\_

Úloha	1	2	3	4	Celkem
Maximum	10	10	10	10	40
<i>Počet bodů</i>					

1. Uvažujte funkci

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (2y + 3)^2$$

s definičním oborem  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) (2 b) Je  $f$  konvexní? Odpověď pečlivě zdůvodněte.
- (b) (3 b) Vyřešte problém  $\min \{f(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- (c) (2 b) Jak vypadá iterace gradientní metody z bodu  $(1, 0)$  s délkou kroku  $\alpha_k$ ?
- (d) (3 b) Jak vypadá iterace Newtonovy metody z bodu  $(1, 0)$ ?

**Řešení:**

- (a) Funkce  $f$  je konvexní, protože je součtem konvexních funkcí (sčítance jsou konvexní funkce, neboť jsou složením konvexní funkce s affinní funkcí).
- (b) Gradient je  $\nabla f(x, y) = (2(x - 2), 4(2y + 3))$ . Jediný stacionární bod je tedy  $(2, -\frac{3}{2})$  a protože je  $f$  konvexní, je to i bod globálního minima.
- (c)  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{z}_k)$ , kde parametr  $\alpha_k > 0$  určuje délku kroku a  $\mathbf{z}_k = (1, 0)$ , tedy po dosazení lze psát  $\mathbf{z}_{k+1} = (1 + 2\alpha_k, -12\alpha_k)$ .
- (d)  $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - f''(\mathbf{z}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{z}_k)$ , kde

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad f''(x, y)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Potom  $\mathbf{z}_{k+1} = (2, -\frac{3}{2})$ .

2. Pekař peče chleba a koláče. Jeden kus chleba se prodává za 2 eura a jeden koláč stojí 3 eura. K výrobě kusu chleba je zapotřebí kilogram mouky a 2 h práce. Výroba jednoho koláče vyžaduje 2 kg mouky a 1 h práce. Pekař má k dispozici 10 kg mouky a 8 h práce. Jeho cílem je maximalizovat celkový výnos z prodeje chleba a koláčů při daných produkčních kapacitách.

- (a) (3 b) Formulujte tuto úlohu jako optimalizační problém. Podmínky celočíselnosti uvádět nemusíte.
- (b) (3 b) Nalezněte optimální množství vyráběných chlebů a koláčů.
- (c) (2 b) Napište duální program.
- (d) (2 b) Nalezněte optimální řešení duálu pomocí podmínek komplementarity.

**Řešení:**

- (a) Jde o LP:  $\max 2x + 3y$  z.p.  $x + 2y \leq 10$ ,  $2x + y \leq 8$ ,  $x, y \geq 0$ . (b) Přípustná řešení tvoří omezený konvexní polyedr s vrcholy  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(0, 5)$ . Optimum má hodnotu 16 a je v bodě  $(2, 4)$ . (c) Duální úloha je  $\min 10u + 8v$  z.p.  $u + 2v \geq 2$ ,  $2u + v \geq 3$ ,  $u, v \geq 0$ . (d) Protože obě proměnné jsou v optimu primáru nenulové, optimální řešení duálu musí být řešením soustavy rovnic  $u + 2v = 2$ ,  $2u + v = 3$ , což vychází jako  $(u, v) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ .

3. Řešte následující úlohy.

- (a) (2 b) Je zobrazení  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 3x_3 + 1, x_2 - x_3)$  affinní? Pokud ano, napište ho ve tvaru  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$  pro nějakou matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$ .
- (b) (2 b) Určete singulární čísla matice  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- (c) (2 b) Je funkce  $f(x) = \min\{x^2, x^2 - 2x + 1\}$  konvexní? Zdůvodněte (stačí obrázek).
- (d) (4 b) Určete vzdálenost bodu  $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$  od lineárního prostoru generovaného vektory  $(-2, 1, 0)$  a  $(1, 2, 3)$ .

**Řešení:**

- (a) Ano.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = (1, 0)$ . (b) Spočteme

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

ta má vlastní čísla 8 a 2, neboť char. polynom je  $(2 - x)(8 - x)$ . Singulární čísla jsou  $\sqrt{8}$  a  $\sqrt{2}$ . (c) Není. (d) Hledaná vzdálenost je rovna velikosti pravoúhlého průmětu vektoru  $\mathbf{a}$  na přímku kolmou k tomu prostoru a procházející počátkem. Směr  $\mathbf{u}$  této přímky získáme vektorovým součinem nebo řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

obecné řešení je  $\mathbf{x} = (t, 2t, -\frac{5}{3}t)$ , tedy  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{70}}(3, 6, -5)$ . Dostaneme

$$\|\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{a}\| = |\mathbf{u}^T \mathbf{a}| = \frac{7}{\sqrt{70}}.$$

4. (10 b) Pro zadaná data vyřešte problém lineární regrese s funkcí  $f(x, y) = ax + by$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou hledané parametry. Data jsou v tabulce, přičemž  $z_i \approx f(x_i, y_i)$ .

$x_i$	$y_i$	$z_i$
1	1	9
2	-2	7
3	1	11

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = (9, 7, 11)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T \mathbf{b} = (56, 6)$$

$$a = 4, b = 1$$