Zkouška OPT 15.1.2025 | Jméno: Příjmení:

Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis, tvořený dvěma oddělenými listy. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.

---

1. **(2b)** Staví se tunel pro vlak skrz horu. Tunel bude mít průřez tvaru sjednocení obdélníka a půlkruhu, přičemž průměr půlkruhu je tvořen horní stranou obdélníka. Jaké rozměry má mít tunel, aby při pevném obvodu průřezu byl obsah průřezu co největší?

   Označme a vodorovnou stranu obdéníka (a zároveň průměr půlkruhu) a b svislou stranu. Obvod obrazce je $o = (1+\pi/2)a + 2b$, obsah $S = ab + \pi a^2/8$. Chceme maximalizovat obsah přes proměnné a, b za podmínky že obvod je nějaké dané (i když neznámé) číslo o. To nejlépe uděláme vyjádřením jedné proměnné z podmínky a dosazením do kritéria, čímž úlohu převedeme na úlohu s jednou proměnnou.

   Máme $b = (o - (1+\pi/2)a)/2$, tedy

$$S(a) = \frac{a(o-(1+\pi/2)a)}{2} + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{ao}{2} - \frac{1+\pi/2}{2}a^2 + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{ao-(1+\pi/4)a^2}{2}$$

   Zderivujeme podle a a položíme rovno nule, což dá $o = (2+\pi/2)a$, z toho dostaneme a. Druhá derivace $S(a)$ podle a je záporná, funkce je tedy parabola s čumákem mířícím nahoru, tedy máme volné lokální maximum, které je i globální. To dosadíme do výrazu výše pro b. Přitom se o vyruší (jak jsme mohli vytušit) a dostaneme $a = 2b$. Tedy šířka tunelu má být dvakrát větší než výška obdélníkové části.

   Ignorovali jsme omezení, že a, b mají být ve skutečnosti nezáporné. Měli bychom správně ověřit, že to nevadilo. Funkci $S(a)$ maximalizujeme podle a vlastně za podmínek $a \geq 0$ a $b \geq 0$, kde druhí po dosazení zní $a \leq o/(1+\pi/2)$. Hledáme tedy maximum funkce $S(a)$ na intervalu $[0, o/(1+\pi/2)]$. Nalezené volné maximum leží uvnitř něho a hodnota v krajních bodech není větší.

---

2. Máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y - x^2 &= 1 \\ x - y &= -1 \\ -x + 2y + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

   (a) **(1b)** Kolik má soustava řešení? Odpověď dokažte. Nemá řešení, je tedy přeurčená. To dokážeme tak, že si zjedné rovnice (nejlépe druhé) vyjádříme jednu proměnnou, dosadíme do ostatních a dostaneme spor.

   (b) **(2b)** Chceme najít přibližné řešení soustavy ve smyslu nejmenších čtverců. Zformulujte tuto úlohu ve standardním tvaru (musí být jasně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezující podmínky).
   Minimalizujeme funkci $(x+y-x^2-1)^2 + (x-y+1)^2 + (-x+2y+y^2)^2$ přes proměnné $x, y \in \mathbb{R}$ bez omezení.

   (c) **(2b)** Napište iteraci Gaussovy-Newtonovy pro úlohu formulovanou v bodě (b).
   Iterace je $(x,y) := (x,y) - \mathbf{g}'(x,y)^+\mathbf{g}(x,y)$ (užíváme operátor přiřazení $:=$, tedy si ušetříme psaní x_k, x_{k+1} atd.)

$$\mathbf{g}(x,y) = \begin{bmatrix} x+y-x^2-1 \\ x-y+1 \\ -x+2y+y^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}'(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2+2y \end{bmatrix}$$

   (Neřeklo se, že chceme čistou metodu, takže můžeme případně přidat koeficient délky kroku.)

3. **(2b)** Najděte afinní zobrazení, které vektor $(1, 0, -1)$ zobrazí na vektor $(0, 0)$ a vektor $(-2, 0, 2)$ zobrazí na vektor $(1, 1)$. Jestliže takové zobrazení neexistuje, dokažte to. Poznamenejme, že lineární zobrazení považujeme za speciální případ afinního zobrazení.

   Hledané afinní zobrrazení má tvar $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\mathbf{b}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Označíme si nějak krátve prvky $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$ a napíšeme si soustavu rovnic pro ty dvě dvojice vektorů:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Z toho dostaneme $g === c - a = f - d = 1/3$, jiné podmínky nejsou. Tedy obecný tvar afinního zobrazení je např.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a + 1/3 \\ d & e & d + 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

   kde čísla a, b, d, e můžeme zvolit libovolně.

   Pozn: někdo si možná ihned všiml, že vektor $\mathbf{b}$ nemůže být nulový (tj. zobrazení nemůže být lineární)

---

4. Máme množinu $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y \geq 1,\ x \geq 1 \,\}$.

   (a) **(1b)** Nakreslete (co nejpřesněji) množinu X.

   (b) **(1b)** Co je hranicí množiny X? Napište množinovým zápisem (obrázek nebo slovní popis nestačí).
   Množina $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 1,\ x \geq 1 \,\} \cup \{\, (1, y) \mid y \geq 1 \,\}$.

   (c) **(2b)** Najděte bod množiny X, který je nejblíže počátku.
   $x = 2^{1/6}$, $y = 2^{-1/3}$.

   (d) **(1b)** Je úloha formulovaná v bodě (c) konvexní? Odpověď odůvodněte. Ano.

---

5. Chceme minimalizovat výraz $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{A}$ je daná symetrická regulární matice.

   (a) **(1b)** Napište co možná jednoduché vyjádření pro optimální řešení a optimální hodnotu úlohy.
   Nejmensiho vl. cislo matice $\mathbf{A}$ a jemu prislusny vl. vektor.

   (b) **(2b)** Jak by se řešení změnilo, kdybychom omezení změnili na $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1$? Diskutujte různé případy dle vlastností matice $\mathbf{A}$.
   Protože $\mathbf{A}$ je regulární, může být jen positivně definitní, negativně definitní nebo indefinitní.
   Když je $\mathbf{A}$ positivně definitní, výraz $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ bude vždy kladný kromě pro $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kdy bude nulový. Opt. řešení by tedy bylo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ s opt. hodnotou 0.
   Když je $\mathbf{A}$ negativně definitní nebo indefinitní, opt. hodnota původní úlohy bude záporná. Úloha se nezmění, jinými slovy omezení $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1$ bude v optimu aktivní. Dúkaz: kdyby nebylo (tj. $\mathbf{x}^T\mathbf{x} < 1$ v optimu), mohli bychom vektor $\mathbf{x}$ (optimální pro původní úlohu) prodloužit (vynásobit vhodným kladným skalárem) a tím zmenšit účelovou hodnotu $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ při neporušení omezení $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq 1$, což je spor.

   (c) **(2b)** Jak by se řešení změnilo, kdybychom omezení změnili na $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 1$? Opět diskutujte různé případy.
   Když je $\mathbf{A}$ positivně definitní, opt. hodnota původní úlohy je kladná. Úloha se nezmění, tj. omezení $\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq 1$ bude v optimu aktivní, důkaz analogicky.
   Když $\mathbf{A}$ je negativně def nebo indef, opt. hodnota původní úlohy je záporná. Tedy produžováním vektoru $\mathbf{x}$ bychom mohli zmenšovat účelovou hodnotu libovolně bez porušení omezení. Tedy úloha bude neomezená.

6. Máme funkci dvou proměnných $f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y)$, kde ln značí přirozený logaritmus a e jeho základ.

   (a) **(1b)** Najděte všechny extrémy funkce f. U každého extrému určete jeho typ (minimum/maximum, globální/lokál

   (b) **(1b)** Najděte Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(0,0)$. Výsledný polynom upravte do skalárního tvaru (tj. aby neobsahoval matice a vektory) a zjednodušte.

   (c) **(1b)** Najděte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0,0)$. Výsledný polynom podobně upravte.

   $f_x(x,y) = f_{xx}(x,y) = f(x,y)$, $f_y(x,y) = f_{xy}(x,y) = \mathrm{e}^x/(1+y)$, $f_{yy}(x,y) = -\mathrm{e}^x/(1+y)^2$.
   Stac. body žádné nejsou tedy ani extrémy nejsou, $T^1_{(0,0)}(x,y) = y$, $T^2_{(0,0)}(x,y) = y + xy - y^2/2$.

---

7. **(3b)** V prostoru $\mathbb{R}^n$ máme kouli se středem $\mathbf{a}$ a poloměrem p, kouli se středem $\mathbf{b}$ a poloměrem r a nadrovinu $\{\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T\mathbf{x} = d\,\}$, kde $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ a $p,r,d \in \mathbb{R}$. Hledáme vzdálenost mezi nadrovinou a průnikem daných dvou koulí (předpokládejte, že koule se protínají). Zformulujte jako optimalizační úlohu ve standardním tvaru. Ve vaší formulaci musí být jasně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezující podmínky. Úlohu neřešte.

   Minimalizuj $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ za podmínek $\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\| \le p$, $\|\mathbf{b}-\mathbf{x}\| \le r$, $\mathbf{c}^T\mathbf{y} = d$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Interpretace: $\mathbf{x}$ je lib. bod na průniku koulí (to je dáno prvními dvěma omezeními: bod $\mathbf{x}$ musí ležet zároveň v obou koulích), $\mathbf{y}$ je lib. bod na nadrovině, hledáme takové $\mathbf{x},\mathbf{y}$ aby jejich vzdálenost byla nejmenší.

---

8. Maximalizujeme $5x_1 + 2x_2$ za podmínek $x_1 + x_2 \le 3$, $2x_1 + x_2 \le 4$, $x_1 + x_2 \ge 0$, kde proměnné jsou $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

   (a) **(1b)** Najděte optimální argument a optimální hodnotu úlohy libovolným postupem. Postup popište.
   Jde o úlohu LP. Řešíme graficky. Nakreslíme si přípustnž mnohostěn v rovině, ten je neomzený a má dva extremální body. Nakreslíme si vrstevnici úč. fce, ty budou kolmé k vektoru $(5,2)$. Optimum existuje a nabývá se v extremálním bodě $(x,y) = (4,-4)$, s opt. hodnotou 12.

   (b) **(1b)** Napište k úloze duální úlohu.
   Dle návodu na kontrukci duální úlohy LP ve skriptech, který si rozumní lidé napsali na tahák (nebo to jde odvodit Lagrangeovou dualitou, ale to trvá déle a je to nepovinné). Zde je zároveň primár a duál:

max	$5x_1 + 2x_2$	min	$3y_1 + 4y_2$
z.p.	$x_1 + x_2 \le 3$	z.p.	$y_1 \ge 0$
	$2x_1 + x_2 \le 4$		$y_2 \ge 0$
	$x_1 + x_2 \ge 0$		$y_3 \le 0$
	$x_1 \in \mathbb{R}$		$y_1 + 2y_2 + y_3 = 5$
	$x_2 \in \mathbb{R}$		$y_1 + y_2 + y_3 = 2$

   (c) **(1b)** Napište podmínky komplementarity pro dvojici primární a duální úlohy.
   $(x_1 + x_2 - 3)y_1 = 0$ (neboli aspoň jedna z podmínek $x_1 + x_2 \le 3$ a $y_1 \ge 0$ je aktivní), $(2x_1 + x_2 - 4)y_2 = 0$, $(x_1 + x_2)y_3 = 0$.

   (d) **(2b)** Vyřešte duální úlohu libovolnou metodou. Zvolte pokud možno jednoduchou metodu a odůvodněte svůj výběr. Ukažte, že primární a duální optimální řešení splňují podmínky komplementarity.
   K nalezení opt. duálního řešení je výhodné použít věty o komplementaritě, která říká že opt. primární a duální řešení musí splňovat podmínky komplementarity. Primární opt. řešení už máme. V něm je první primární omezení neaktivní a ostatní aktivní, tedy první duální proměnná y_1 muaí být nulová. Z duálních omezení nám zbývá soustava dvou rovnic o dvou neznámých, která má řešení $(y_2, y_3) = (3,-1)$. Tedy opt. duální řešení je $(y_1, y_2, y_3) = (0,3,-1)$.