

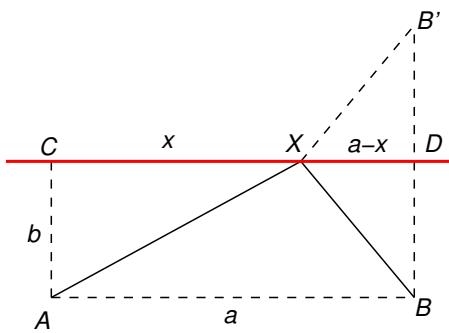
Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis, tvořený dvěma oddělenými listy.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.

1. Na dětském táboře se pořádá závod, ve kterém start a cíl jsou od sebe vzdáleny a metrů a jsou ve stejné vzdálenosti b metrů od rovné nekonečně dlouhé zdi (tj. spojnice startu a cíle je rovnoběžná se zdí a vzdálená b metrů od zdi). Závodník vyběhne ze startu a běží popředu (tj. nosem napřed) ke zdi, dotkne se zdi a pak běží pozadu (tj. zadkem napřed) do cíle. Pozadu běží poloviční rychlostí než popředu. V jakém bodě se musí dotknout zdi, aby trasu uběhl za nejmenší čas?

- (a) (3b) Úlohu zformulujte jako minimalizaci funkce jedné proměnné. Tuto proměnnou vhodně zvolte a popište její význam slovy a pomocí obrázku. Zformulovanou úlohu už neřešte.

Označme bod startu jako A , bod cíle jako B , a bod dotyku jako X . Označme dále body na zdi nejblíže bodům A, B jako C, D . Tedy $a = |AB|$ a $b = |AC| = |BD|$. Nechť $x = |AX|$ (to je naše 'šikovně zavedená' proměnná). Pak z trojúhelníků ACX a BDX máme délky obou částí dráhy. Čas běhu je tedy $f(x) = (1/v)\sqrt{b^2 + x^2} + (2/v)\sqrt{b^2 + (a-x)^2}$ kde v je rychlosť běhu popředu (můžeme BÚNO předpokládat $v = 1$).

Pozn: Stacionární podmínky vedou na rovnici s odmocninami, která jde upravit na hledání kořene polynomu 4. stupně.



- (b) (2b) Myslíte, že pro tuto úlohu platí nějaká analogie Snellova zákona odrazu [zde je chyba v zadání, má tu být 'zákona lomu', což jsme řekli ústně během písemce]? Pokud ano, jasně ji zformulujte a odůvodněte její správnost.

Označme jako B' zrcadlový obraz bodu B (cíle) vzhledem k zdi. Pak zjevně $|XB| = |XB'|$. Tedy závod lze ekvivalentně vidět tak, že místo zdi máme hranici dvou prostředí s různou rychlosťí běhu: běžím nějakou rychlosťí od A k hranici (do bodu X) a pak poloviční rychlosťí z X do B' . Tedy lze použít Snellův zákon lomu (viz středoškolská fyzika a skripta Cvičení 11.11b) v nezměněné podobě: poměr sinů úhlů CAX (označen α) a $DB'X$ (stejný jako DBX , označen β) je roven poměru rychlosťí, tedy $\sin \beta / \sin \alpha = 2$.

Jde to odvodit i algebraicky: stacionární podmínka $f'(x) = 0$ se dá upravit na $2x/\sqrt{b^2 + x^2} = (a-x)/\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$, což je totéž jako $2 \sin \alpha = \sin \beta$.

Vzhledem k chybě v zadání jsem tento podpíklad hodnotil takto velkoryse: kdo odvodil pro naši úlohu vztah $\sin \beta / \sin \alpha = 2$ (atž už pomocí triku s ozrcadlením nebo algebraicky) tak má 2 body, kdo napsal něco smysluplného aspoň trochu k věci tak dostal 1, kdo napsal nesmysl dostal 0.

2. (2b) Jsou dány čtyři body $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Jak byste jednoduše zjistili, zda tyto body leží v rovině (tj. jsou koplanárni)? Můžete použít operátor 'rank', který najde hodnost matice. Odůvodněte správnost vaší odpovědi.

Čtyři body jsou koplanárni právě když jsou affinně závislé (Příklad 3.4 ve skriptech). Nám se hodí třetí nebo čtvrtá forma definice affinní nezávislosti z Věty 3.14. S použitím hodnosti máme: body jsou koplanárni právě když matice $\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ má hodnost menší než 4 (neboli je singulární), což platí právě když matice $[\mathbf{b} - \mathbf{a} \ \mathbf{c} - \mathbf{a} \ \mathbf{d} - \mathbf{a}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (tj. posuneme body tak, aby jeden byl v počátku, a pak testujeme lin. závislost) má hodnost menší než 3.

3. (3b) Je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$ konvexní? Odpověď dokažte algebraicky (obrázek nestačí) z definice konvexní množiny.

Množina je graf funkce $f(x) = |x|$, z obrázku je patrno že tato množina není konvexní (neplést konvexitu množiny a konvexitu funkce $f(x) = |x|$, která konvexní je). Máme to dokázat algebraicky z definice (13.1). Zvolíme vhodné dva body v množině, např. $(x, y) = (1, 1)$ a $(x', y') = (-1, 1)$, a $\alpha = \frac{1}{2}$. Jestliže by množina byla konvexní, pak dle definice by bod $(1-\alpha)(x, y) + \alpha(x', y') = (0, 1)$ byl v množině, ale on není.

4. Máme úlohu $\max\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$, kde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ jsou dány.

- (a) **(1b)** Je tato úloha lineární program? Odpověď odůvodněte. Jestliže není, převeďte ji na lineární program. Je to LP, protože účelová funkce je lineární a podmínky jsou lineární nerovnosti.
- (b) **(3b)** Vyřešte úlohu úvahou. Výsledek bude postup, jak spočítat optimální argument. Vysvětlete tuto úvahu. Skalárně zapsáno, minimalizujeme výraz $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ za podmínek $a_i \leq x_i \leq b_i$. To se rozpadá na n nezávislých úloh, kde v každé úloze minimalizujeme $c_i x_i$ přes jedinou proměnnou x_i za podmínky $a_i \leq x_i \leq b_i$. Tato úloha se snadno vyřeší úvahou: jestliže $c_i < 0$ pak $x_i^* = a_i$, jestliže $c_i > 0$ pak $x_i^* = b_i$, a jestliže $c_i = 0$ pak může být x_i^* libovolné mezi a_i a b_i .

Správně by se ještě mělo napsat, že když neplatí $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, tak je úloha nepřípustná.

- (c) **(3b)** Napište k úloze duální úlohu.

V primáru maximalizujeme, takže v návodu (15.1) ve skriptech na konstrukci duální úlohy jdeme zprava doleva. Zde je primár (zde vlevo) a duál:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{z.p.} & x_1 \geq a_1 \\ & \dots \\ & x_n \geq a_n \\ & x_1 \leq b_1 \\ & \dots \\ & x_n \leq b_n \\ & x_1 \in \mathbb{R} \\ & \dots \\ & x_n \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \min & a_1u_1 + \dots + a_nu_n + b_1v_1 + \dots + b_nv_n \\ \text{z.p.} & u_1 \leq 0 \\ & \dots \\ & u_n \leq 0 \\ & v_1 \geq 0 \\ & \dots \\ & v_n \geq 0 \\ & u_1 + v_1 = c_1 \\ & \dots \\ & u_n + v_n = c_n \end{array}$$

což lze napsat také vektorově

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{z.p.} & \mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ & \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{a}^T \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \mathbf{v} \\ \text{z.p.} & \mathbf{u} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{c} \end{array}$$

Pozn.: Řekli jsme, že primár se rozpadá na n nezávislých úloh. Napišme primár a duál této jednoduché úlohy (pro jednoduchost vynecháme index i u všeho):

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{z.p.} & x \geq a \\ & x \leq b \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \min & au + bv \\ \text{z.p.} & u \leq 0 \\ & v \geq 0 \\ & u + v = c \end{array}$$

Vidíme, že duál původní úlohy se také rozpadá ne n nezávislých duálů.

5. **(3b)** Existuje lineární isometrie z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 , která zobrazuje vektor $(0, 1, 0)$ na vektor $(0, 1)$? Odpověď odůvodněte.

Neexistuje, protože isometrie by musela být reprezentována maticí 2×3 s ortonormálními sloupci, a taková matice neexistuje protože tři nenulové vektory v \mathbb{R}^2 nemohou být po dvojicích kolmé.

6. **(4b)** Najděte všechny extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ na množině $\{(x, y) \mid x^2 = y, y \leq 1\}$. Pro každý extrém určete typ (lokální/globální, minimum/maximum, volný/vázaný).

Je dobré si nakreslit obrázek, na kterém je množina (část grafu funkce x^2) a páry vrstevnic účelové funkce. Bod $(x, y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ je globální minimum, bod $(-1, 1)$ je lokální maximum, bod $(1, 1)$ je globální maximum.

Všechny tyto extrémy jsou vázané (volný extrém by znamenal, že funkce $x + y$ v něm nabývá minima či maxima bez omezení, což nemůže neb je na \mathbb{R}^2 neomezená zdola i shora).

7. Máme funkci $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$, kde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou dány (\mathbf{A} nemusí být symetrická).

- (a) (2b) Najděte (totální) derivaci funkce f .

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \mathbf{b}^T$$

- (b) (3b) Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce f v daném bodě $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Výsledný polynom zjednodušte (zjednodušení se hodnotí).

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{c}) + f'(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \mathbf{b} + \mathbf{c}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{b}^T (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{c}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} \end{aligned}$$

- (c) (2b) Najděte Taylorův polynom druhého stupně funkce f v daném bodě $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Výsledný polynom opět zjednodušte.

Bude roven funkci f (nezávisle na \mathbf{c}), protože ta už je polynom druhého stupně.

8. Dáno je n bodů $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, které tvoří sloupce matice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$. Napište postup (posloupnost kroků, nemusí to být kód v nějakém programovacím jazyce), jak spočítat čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n \ell_i^2$ byl minimální, kde ℓ_i jsou definována jako

- (a) (2b) $\ell_i = ax_i + by_i + c + z_i$

Uloha na linearní nejménší ctverce / lineární regresi. Jde napsat jako $\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{P}\mathbf{u} - \mathbf{q}\|^2$ kde $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ má řádky $(x_i, y_i, 1)$ a $q_i = -z_i$. Reseni v Matlabu $\mathbf{u} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{q}$.

- (b) (2b) $\ell_i = ax_i + by_i + cz_i$

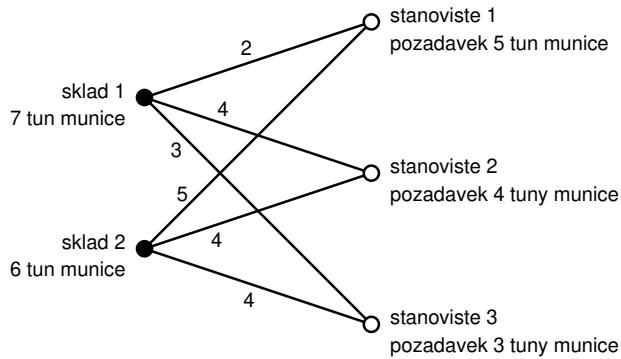
Účelová funkce je vždy nezáporná a pro $a = b = c = 0$ je rovna nule, což je tedy optimální řešení.

- (c) (2b) ℓ_i značí vzdálenost bodu (x_i, y_i, z_i) od množiny $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$

Uloha na PCA. Uděláme SVD $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, pak (a, b, c) je sloupec \mathbf{U} odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu (protože zmíněná množina je nadrovina a (a, b, c) je její normála, tedy báze jejího ortog. doplňku).

Nebo taky můžeme udělat spektrální rozklad $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T$ a (a, b, c) bude sloupec \mathbf{V} odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu.

9. (3b) Chceme co nejlevněji převozit munici nákladními auty ze dvou skladů na tři palebná stanoviště. V každém skladu je známé množství munice a každé stanoviště požaduje známé množství munice dle obrázku (např. v prvním skladu je 7 tun munice). Ceny za převezení jedné tuny munice z určitého skladu na určité stanoviště jsou také známy, dle obrázku (např. převoz tuny munice z prvního skladu na první stanoviště stojí 2 cenové jednotky). Chceme uspokojit všechna stanoviště, přičemž sklady se nemusejí vyčerpat. Mezi každou dvojicí sklad-stanoviště můžeme jet s nákladem nejvýše jednou, přičemž nikdy nesmíme mít najednou naloženo více než 3 tuny munice, abychom při případném zásahu auta nepřítelem nepřišli o přiliš mnoho munice. Cesty s prázdným autem nestojí nic. Formulujte jako lineární program.



To je dopravní úloha (skripta §12.3.3) s dodatečným omezením na maximální homotnost munice převážené v jednom nákladu. Označme jako x_{ij} hmotnost munice převezené ze skladu i na stanoviště j . Pak úloha bude

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} \\ \text{z.p.} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 7 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 6 \\ & x_{11} + x_{21} = 5 \\ & x_{12} + x_{22} = 4 \\ & x_{13} + x_{23} = 3 \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 3 \quad (i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3\}) \end{array}$$

Ve třetím, čtvrtém a pátém omezení mohou být i nerovnosti \geq , to úlohu nezmění.