Zkouška OPT 12.2.2025 | Jméno: Příjmení:

Řešení pište do připravených mezer. Odevzdává se pouze tento čistopis, tvořený dvěma oddělenými listy.
Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu nestačí.

---

1. Drát o délce 2 chceme přestřihnout na dva kusy, přičemž jeden kus chceme ohnout do tvaru čtverce a druhý do tvaru rovnostranného trojúhelníku. Kde (pokud vůbec) musíme drát přestřihnout, aby součet obsahů čtverce a trojúhelníku byl

   (a) **(2b)** co nejmenší,

   Nechť má kus drátu pro čtverec délku x a kus drátu pro trojúhelník délku $2-x$. Tedy čtverec má stranu $x/4$ a obsah $x^2/16$. Obsah rovnostr. trojúhelníka o straně a je $\sqrt{3}a^2/4$, tedy trojúhelník má stranu $(2-x)/3$ a obsah $\sqrt{3}(2-x)^2/36$. Tedy celkový obsah a jeho derivace je

   $$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(2-x)^2, \quad A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x, \quad A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

   Máme najít minimum funkce A na intervalu $[0,2]$. Funkce A je kvadratická, je navíc konvexní neb druhá derivace je kladná.

   Stacionární bod $x = \frac{8\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}+4} \approx 0.8699$ je globální minimum fce A na $\mathbb{R}$. Musíme zkontrolovat, jestli globální minimum na intervalu $[0,2]$ není na kraji intervalu, ale není.

   (b) **(2b)** co největší?

   Maximum se bude nabývat v jednom z bodů $x=0$ nebo $x=2$, zkouškou je to $x=2$. Tedy maximum obsahu bude, když drát nestřihneme a celý ho ohneme do čtverce.

---

2. Hledáme vzdálenost bodu $(2,1)$ od množiny $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\,\}$.

   (a) **(1b)** Formulujte úlohu. Musí být zřejmé, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezující podmínky.

   Minimalizuj $(x-2)^2 + (y-1)^2$ za podmínky $x^2 = y$ přes proměnné $x, y \in \mathbb{R}$.

   Pozn: Mohli bychom ekvivalentně minimalizovat $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, to by ale zesložitilo řešení úlohy a vymstilo by se nám to při formulaci Newtonovy iterace.

   (b) **(2b)** Zjednodušte formulaci na minimalizaci funkce jedné proměnné bez omezení.

   Minimalizuj $f(x) = (x-2)^2 + (x^2-1)^2$

   (c) **(3b)** Funkci z podúkolu (b) chceme minimalizovat Newtonovu metodou. Napište vzorec pro iteraci metody (tedy jak se spočítá příští odhad z aktuálního odhadu). Vzorec smí obsahovat jen operace plus, mínus, krát, děleno a mocnění přirozeným číslem.

   $f'(x) = 2(x-2) + 4x(x^2-1) = 2(2x^3 - x - 2)$
   $f''(x) = 2(6x^2-1)$
   $x \leftarrow x - f'(x)/f''(x) = x - (2x^3-x-2)/(6x^2-1) = (4x^3+2)/(6x^2-1)$

---

3. **(2b)** Najděte ortogonální projektor na podprostor $\{\,(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \; x_1 + x_3 = 0\,\}$.

   Jedná se o podprostor dimenze 3 prostoru $\mathbb{R}^4$. Není definován bází, ale soustavou lineárních homogenních rovnic, zde jen jedinou rovnicí $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0$ kde $\mathbf{a} = (1,0,1,0)$. Mohli bychom najít nějakou bázi toho podprostoru a z toho projektor spočítat. Rychlejší ale je postupovat přes ortogonální doplněk, jehož báze je vektor $\mathbf{a}$. Projektor na tento ort. doplněk je $\mathbf{P}' = \mathbf{a}\mathbf{a}^T/(\mathbf{a}^T\mathbf{a})$ a projektor na původní podprostor je

   $$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{P}' = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

4. **(3b)** Napište vzorec pro (totální) derivaci funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je daná symetrická matice a $\mathbf{g}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je dané diferencovatelné zobrazení (jehož derivace v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$).

   Jedná se o složeninu funkcí $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Řetízkovým pravidlem tedy máme $f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{g}'(\mathbf{x})$.

5. Mějme funkci $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

   (a) **(1b)** Najděte všechny stacionární body funkce f.
   $f'(x,y) = 3[x^2 - y\ y^2 - x]$. Dva body $(0,0)$ a $(1,1)$.

   (b) **(2b)** Pro každý stacionární bod funkce f určete, zda je to lokální extrém a případně jaký.

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}, \quad f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

   V bodě $(0,0)$ jsou vlastní čísla Hessiánu ± 3, tedy sedlo.
   V bodě $(1,1)$ jsou vlastní čísla Hessiánu $\{3, 9\}$, tedy lokální minimum.

   (c) **(2b)** Najděte Taylorův polynom prvního stupně funkce f v bodě $(1,2)$. Výsledný vzorec upravte do skalárního tvaru (tj. nesmí obsahovat matice a vektory) a zjednodušte ho.
   $f(1,2) = 3$, $f'(1,2) = (-3, 9)$, $T^1_{(1,2)}(x,y) = -3x + 9y - 12$

   (d) **(1b)** Najděte směrovou derivaci funkce f v bodě $(1,2)$ ve směru $(-1,1)$.
   Směrová derivace je 12. Pokud ale někdo směr $(-1,1)$ nejprve normalizoval na $(-1,1)/\sqrt{2}$ a vyšlo mu tedy $12/\sqrt{2}$, taky to uznáme (i když v tomto předmětu jsme směrovou derivaci definovali i pro nenormalizované směry).

---

6. **(4b)** Najděte řešení $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jehož Mahalanobisova norma je minimální. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lineárně nezávislé řádky. Mahalanobisova norma vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\|\mathbf{x}\|_\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}}$, kde $\mathbf{C}$ je positivně definitní (kovarianční) matice. Výsledek příkladu bude jediný vzorec, jak spočítat $\mathbf{x}^*$ z $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}$.

Minimalizujme $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$ (kde jsme oddělali odmocninu aby to nevyšlo složité, dále jsme přidalo $\frac{1}{2}$ aby nás dále neotravovala dvojka) za podmínky $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Lagrangeova funkce $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$, podmínky prvního řádu

$$L_\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

První podmínku transponujeme a vyádříme z ní $\mathbf{x} = \mathbf{CA}^T\boldsymbol{\lambda}$. Dosadíme do druhé, $\mathbf{ACA}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}$, z čehož $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{ACA}^T)^{-1}\mathbf{b}$. To dosadíme zpět do vzorce výše a máme $\mathbf{x} = \mathbf{CA}^T(\mathbf{ACA}^T)^{-1}\mathbf{b}$.

Všimněte si, že pro $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ se výsledek redukuje na řešení nedourčené soustavy s nejmenší (euklidovskou) normou $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}$, který znáte ze skript.

---

7. Máme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Následující podúkoly vyřešte numericky a napište i postup.

   (a) **(1b)** Spočtěte singulární čísla matice $\mathbf{A}$.

   (b) **(2b)** Spočtěte redukovaný singulární rozklad (SVD) matice $\mathbf{A}$.
   Redukovaný SVD má tvar $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$, kde $\mathbf{U}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Použijeme vztah mezi spektrálním rozkladem a SVD: $\mathbf{AA}^T = \mathbf{US}^2\mathbf{U}^T$, což je spektrální rozklad matice $\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Protože $\mathbf{AA}^T$ už je diagonální, máme ho bez počítání: $\mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tedy $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ a singulární čísla tedy jsou $\sqrt{2}$ a 1. Matici $\mathbf{V}$ dopočítáme ze vzorce $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$: $\mathbf{V}^T = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
   Ještě můžeme (ale není to nutné) srovnat sing. čísla na diagonále $\mathbf{S}$ sestupně (prohodíme je a prohodíme také sloupce $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$), tedy $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Naknec je dobré zkontrolovat, že opravdu $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$.

   (c) **(1b)** Najděte matici hodnosti 2, která je nejblíže (ve smyslu Frobeniovy normy) matici $\mathbf{A}$.
   Je to matice $\mathbf{A}$, protože ta má už hodnost 2.

   (d) **(2b)** Najděte matici hodnosti 1, která je nejblíže (ve smyslu Frobeniovy normy) matici $\mathbf{A}$.
   Pohodlné je použít Eckart-Younga: kýžená matice je $\mathbf{A}' = \mathbf{US}'\mathbf{V}'$ kde $\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tedy $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Jsou dány vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ a čísla $b_1, \ldots, b_m, c \in \mathbb{R}$. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} g(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i)$, kde funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako

$$g(y) = \begin{cases} 2 - y & \text{když } y < c, \\ 2y - 1 & \text{když } y \geq c. \end{cases}$$

   (a) **(1b)** Načrtněte graf funkce g pro hodnotu $c = 1$.

   (b) **(2b)** Pro $c = 1$ formulujte minimalizaci funkce f jako lineární program. Pokud to nejde, odůvodněte.

   Funkce g je spojita (protoze $2 - y = 2y - 1$ ma reseni $y = 1 = c$) a muzeme ji napsat jako maximum dvou afinnich funkci: $g(y) = \max\{2-y, 2y-1\}$. Tedy minimalizujeme $f(\mathbf{x}) = \sum_i \max\{2-\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i, 2\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}-2b_i-1\}$. To jde napsat jako LP zavedenim pomocnych promennych (viz skripta): minimalizujeme $\sum_i z_i$ za podminek $2 - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + b_i \leq z_i$ a $2\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - 2b_i - 1 \leq z_i$, pres promenne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$.

   Toto LP jde take napsat jeste jinak, napr. muzeme zavest jeste pomocne promenne y_i, pak minimalizujeme $\sum_i z_i$ za podminek $2 - y_i \leq z_i$ a $2y_i - 1 \leq z_i$ a $y_i = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i$, pres promenne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$.

   (c) **(1b)** Načrtněte graf funkce g pro hodnotu $c = 0$.

   (d) **(2b)** Pro $c = 0$ formulujte minimalizaci funkce f jako lineární program. Pokud to nejde, odůvodněte.

   V tomto pripade je funkce g v bode $c = 0$ nespojita a proto nejde napsat jako maximum nejakych afinnich funkci (jiny argument je, ze je nekonvexni kvuli nespojitosti). Proto minimalizace f nejde napsat jako LP.

---

9. **(3b)** Chceme zjistit, zda funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ je vektorová norma. Za tímto účelem pro každý z axiomů normy uveďte, zda jej funkce f splňuje či nesplňuje, a své odpověďi dokažte.

   Axiom $\|\mathbf{x}\| = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ splňuje, neb $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ zjevně platí jen pro $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   Positivní homogenitu nesplňuje: $f(\alpha\mathbf{x}) \neq |\lambda| f(\mathbf{x})$.

   Trojúhelníkovou nerovnost nesplňuje: $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}$ se dá upravit na $\mathbf{x}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$, což zjevně neplatí pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (protipříklad je $\mathbf{x} = \mathbf{y} = (1, 1)$).

Max. počet bodů: 40