Pravděpodobnostní prostor:

Ω ... množina elementárních jevů
$\mathcal{A}$ ... σ-algebra na Ω
P ... pravděpodobnostní míra $\begin{pmatrix} P(\Omega)=1 \\ P(\emptyset)=0 \end{pmatrix}$
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Jevy & operace:

$\emptyset$ ... jev nemožný
Ω ... jev jistý
$A \cup B$ ... sjednocení (nastane A nebo B)
$A \cap B$ ... průnik (nastane A a B)
$B - A$ ... rozdíl (nastane B ale ne A)
$A \subset B$ ... A podjev B (nastane-li A, nastane i B)
$\bar{A}, A^C = \Omega - A$ ... doplněk jevu (jev opačný)
$A \cap B = \emptyset$ ... disjunktní jevy (nemohou nastat zároveň)

Vlastnosti pravděpodobnostní míry:

$0 \le P(A) \le 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
$A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
$\forall A, B, C \in \mathcal{A}$
princip inkluze a exkluze
$A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

Úplný systém jevů:

$A_1, A_2, \dots, A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j, i \neq j$
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) = 1$

Klasický pravděpodobnostní prostor:

Ω je konečná
P elementárních jevů je $\frac{1}{|\Omega|}$
$\mathcal{A} = \exp \Omega, \quad A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Kostky a co na nich padne
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $P(L) = \frac{3}{6}$
$L = \{1,3,5\}, S = \{2,4,6\}$ $P(S) = \frac{3}{6}$

Geometrický:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$, elementární jevy jsou body
$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ borelovská σ-algebra
$A \in \mathcal{A} : P(A) = \frac{\mu^n(A)}{\mu^n(\Omega)}$
$n=1$: délka úsečky
$n=2$: plocha
$n=3$: objem

Obecný diskrétní:

Ω ... konečný/spočetný
$\mathcal{A} = \exp \Omega$
dány pravděpodobnosti elementárních jevů $\omega_i \in \Omega$
$A \in \mathcal{A} : P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

Obecný spojitý:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle : \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$
(hustota)
$P(A) = \int_A f(x)\,dx$

Podmíněná pst.:

$A, B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Pravděpodobnost, že se stane A pokud se již stalo B, zúžení pst. prostoru na B.

Platí:

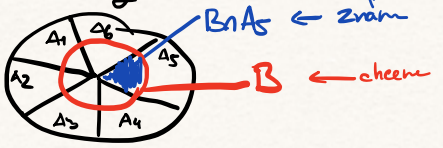
$P(A|B) \ge 0$
$P(\Omega|B) = 1$
$P(\bigcup A_i | B) = \sum P(A_i|B)$
$P(B|\Omega) = P(B)$

Řetězové pravidlo:

$A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}, P(\bigcap A_i) > 0$
$P(\bigcap A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots$

Úplná pravděpodobnost:

$A_1, \dots A_n$ úplný systém jevů
$B \in \mathcal{A}$, známe $P(B|A_i)$ $\forall i$ a $P(A_i)$
$P(B) = \sum_i P(A_i) P(B|A_i)$
Známe "kousek" $P(B)$ od každého A_i, které jsou disjunktní a tvoří dohromady $\Omega \to$ známe $P(B)$



Bayesova věta:

Předpoklady z úplné pravděpodobnosti
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$
2 dílčích $P(B|A_i)$ zjistíme $P(B)$, $P(A_i \cap B)$ a pak spočítáme podmíněnou pst.

Nezávislost jevů:

$P(A \cap B) = P(A) P(B)$ 1.
$P(A|B) = P(A)$ 2.
$A_1, \dots A_n$ totálně nezávislé pokud je nezávislá každá k-tice z nich
Po dvou nezávislé pokud jsou nezávislé pro každé i, j, $i \neq j$

Náhodná veličina:

$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ je měřitelné zobrazení
(reálná funkce)
$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ evt. pro B libo.
"náhodné číslo"
Transformace a operace s n.v. jsou n.v.

Distribuční funkce n.v. (CDF):

$F(x) = P(X \in x) = P(\{\omega : X(\omega) \in x\}), x \in \mathbb{R}$
zprava spojitá v každém x
$\lim_{-\infty} F = 0, \quad \lim_{\infty} F = 1$

Diskrétní náhodná veličina

konec. či spočetně mnoho $(x_i; p_i)$ tabulce
$p_i = P(X=x_i)$ a $\sum p_i = 1$

$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i; x_i \le x} P(X=x_i) = \sum_{i; x_i \le x} p_i$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \sum p_i$ pro i: $a \le x_i \le b$

(Abs.) spojitá náhodná veličina

ex. f tak, že $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Směs náhodných veličin

$X = Mix_c(D, S)$

D... diskrétní složka s váhou c

S... spojitá složka s váhou $1-c$

$F_X(x) = cF_D(x) + (1-c)F_S(x) = c\sum_{i; x_i \le x} p_i + (1-c)\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$P(X=x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t)$

x tak, že $P(X=x) > 0$ tvoří spočetně mnoho nespojitostí F_X, velikost skoku $P(X=x)$

Platí stejně i pro směsi stejných typů

Kvantilová funkce n.v.

"inverzní k F_X"

$q_X(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \le \alpha + \inf_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \ge \alpha\right)$

$\alpha \in (0,1)$

Charakteristiky n.v.

Střední hodnota: "těžiště grafu"

spojitá: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

diskrétní: $EX = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot P(X=x_i)$

směs: $EX = cED + (1-c)ES$

Platí: $Ea = a$, $E(aX+bY) = aEX + bEY$

S transformací (funkcí):

$E\,\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)dx$ a analogicky

Rozptyl

$\operatorname{var} X = E(X-EX)^2 \dots EX^2 - (EX)^2$

$\operatorname{var} a = 0$

$\operatorname{var}(aX) = a^2 \operatorname{var} X$

$\operatorname{var}(X+a) = \operatorname{var} X$

$Z = \frac{X - EX}{\sqrt{\operatorname{var} X}}$ .. normalizovaná n.v.

$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y + 2\operatorname{cov}(X,Y)$

Směrodatná odchylka (sted.)

$\text{sted} = \sqrt{\operatorname{var} X}$

Kovariance

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$

$\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var} X$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EX\,EY$

Rozložení diskrétní n.v.

Alternativní: $X \sim Alt(p)$

p... pravděpodobnost výskytu $X=1$

$1-p$ ... $X=0$

$EX = p$, $\operatorname{var} X = p(1-p)$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<0 \\ 1-p: 0 \le x < 1 \\ 1: 1 \le x \end{cases}$

Pouze výskyt nastal / nenastal (p) ($1-p$)

Binomické: $X \sim Binom(n,p)$

n... počet pokusů

p... pravděpodobnost úspěchu

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$EX = np$, $\operatorname{var} X = np(1-p)$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<0 \\ \sum_{0 \le k \le x} P(X=k): 0 \le x < n \\ 1: n \le x \end{cases}$

Pst. že k z n opakovaných nezávislých pokusů bude úspěšných

Poissonovo: $X \sim Po(\lambda)$

$X: k \in \mathbb{N}_0$

$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<0 \\ \sum_{0 \le k \le x} P(X=k): 0 \le x < \infty \end{cases}$

$EX = \operatorname{var} X = \lambda$

Počet nezávislých událostí za daný časový interval na dané ploše ve vymezeném prostoru

Geometrické: $X \sim Ge(p)$

$X: k \in \mathbb{N}$

p... pravděpodobnost úspěchu

$P(X=k) = p(1-p)^k$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<0 \\ \sum_{0 \le k \le x} P(X=k): 0 \le x < \infty \end{cases}$

$EX = \frac{1-p}{p}$, $\operatorname{var} X = \frac{1-p}{p^2}$

Počet neúspěchů před prvním úspěchem

Př. hodů hracími kostkami než bude Hemoblobín

Hypergeometrické: $X \sim HypGe(N, K, n)$

$N, K, n \in \mathbb{N}$, $N \ge K$, $N \ge n$

X: $\max\{0, n+K-N\} \le k \le \min\{n, K\}$

$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<0 \\ \sum_{0 \le k \le x} P(X=k): \text{pro platná } x \\ 1: x \ge \min(n,K) \end{cases}$

$EX = n\frac{K}{N}$, $\operatorname{var} X = n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

Pst., že z N objektů bude K je vyhovujících mezi n prvků k vyhovujících

Rozložení spojité n.v.

Rovnoměrné: $X \sim Ro(a,b)$

X: $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}: x \in \langle a,b \rangle \\ 0: \text{else} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0: x<a \\ \frac{x-a}{b-a}: x \in \langle a,b \rangle \\ 1: x \ge b \end{cases}$

$EX = \frac{a+b}{2}$, $\operatorname{var} X = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Všechny výsledky (hodnoty z $\langle a,b \rangle$) mají stejnou pst.

Exponenciální: $X \sim Exp(\lambda)$

X: $(0, \infty)$

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}: x>0 \\ 0 \text{ else} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}: x>0 \\ 0 \text{ else} \end{cases}$

$EX = \frac{1}{\lambda}$, $\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2}$

Doba čekání na událost, kdy události nastávají na sobě nezávisle