2+3.8+1.9+3.9=11.6

RPZ test 1, varianta Q

Jméno: [redacted]

18. 10. 2024

Úloha 1

Mějme $p(k=2)=0.4$ a sdruženou pravděpodobnost $p(x,k)$ danou tabulkou:

$p(x,k)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$k=1$	A	0.12	0.06	0.36
$k=2$	0.16	0.04	B	0.06

a) Doplňte chybějící hodnoty A a B. *(2 body)*

b) Najděte optimální Bayesovskou strategii pro pozorování x, rozdělení $p(x,k)$ a ztrátu $W(k,d)$ danou následující tabulkou: *(4 body)* 3.8

$W(k,d)$	$d=1$	$d=2$
$k=1$	0	2
$k=2$	1	0

Úloha 2

Uvažujme problém rozhodování do dvou tříd, pro které máme dány hustoty pravděpodobností:

$$p(x|1)=\frac{1}{4}x+0.25$$
$$p(x|2)=\frac{1}{2}x$$

pro $x\in[0.0,2.0]$.

a) Napište *formální* definici minimaxní úlohy. *(2 body)* 1.9

b) Najděte optimální minimaxní strategii pro zadaná rozdělení. *(4 body)* 3.9

(1)

a) $p(k=1) = p(k=1, x=1) + p(k=1, x=2) + \dots + p(k=1, x=4)$

& $p(k=1) = 1 - p(k=2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$\Rightarrow 0{,}6 = A + 0{,}12 + 0{,}06 + 0{,}36$

$A = 0{,}6 - 0{,}54 = \underline{\underline{0{,}06}}$ ✓

$p(k=2) = p(k=2, x=1) + \dots + p(k=2, x=4)$

$0{,}4 = 0{,}16 + 0{,}04 + B + 0{,}06$

$B = 0{,}4 - 0{,}26 = \underline{\underline{0{,}14}}$ ✓

$R(q)$ → iterace přes x do část. rizika nepatří

b) $R(d,x) = \sum_k \sum_x p(x,k) \cdot W(k,d)$ $\quad q(x) = \min R(d,x)$

$x=1$: $R(d=1, x=1) = p(x=1, k=1) \cdot W(k=1, d=1) + p(x=1, k=2) \cdot W(k=2, d=1) =$

$= 0{,}06 \cdot 0 + 0{,}16 \cdot 1 = 0{,}16$

$R(d=2, x=1) = 0{,}06 \cdot 2 + 0{,}16 \cdot 0 = 0{,}12$

$\Rightarrow R(d=1, x=1) > R(d=2, x=1) \rightsquigarrow q(x=1) = 2$

$0{,}16 > 0{,}12$

$x=2$: $R(d=1, x=2) = 0{,}12 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 1 = 0{,}04$

$R(d=2, x=2) = 0{,}12 \cdot 2 + 0{,}04 \cdot 0 = 0{,}24$

$R(d=1, x=2) < R(d=2, x=2)$

$0{,}04 < 0{,}24$

$\rightsquigarrow q(x=2) = 1$

$x=3$: $R(d=1, x=3) = 0{,}06 \cdot 0 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}14$

$R(d=2, x=3) = 0{,}06 \cdot 2 + 0{,}14 \cdot 0 = 0{,}12$

$R(d=1, x=3) > R(d=2, x=3)$

$\rightsquigarrow q(x=3) = 2$

$x=4$: $R(d=1, x=4) = 0{,}36 \cdot 0 + 0{,}06 \cdot 1 = 0{,}06$

$R(d=2, x=4) = 0{,}36 \cdot 2 + 0{,}06 \cdot 0 = 0{,}72$

$R(d=1, x=4) < R(d=2, x=4)$

$\rightsquigarrow q(x=4) = 1$

$\Rightarrow q = \{2, 1, 2, 1\}$ ✓

chybí vysvětlit,

proč $R(x,d)$

můžu počítat přes $p(x,k)$

a nemusím počítat $p(k|x)$

(2) $p(x|1) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ pro $x \in \langle 0; 2 \rangle$

$p(x|2) = \frac{x}{2}$

a) definice minimax:

$q^* = \underset{q: X \to K}{\operatorname{argmin}} \max_{k \in K} \epsilon(k)$, kde $\epsilon(k) = \sum_{x: q(x) \neq k} p(x|k)$

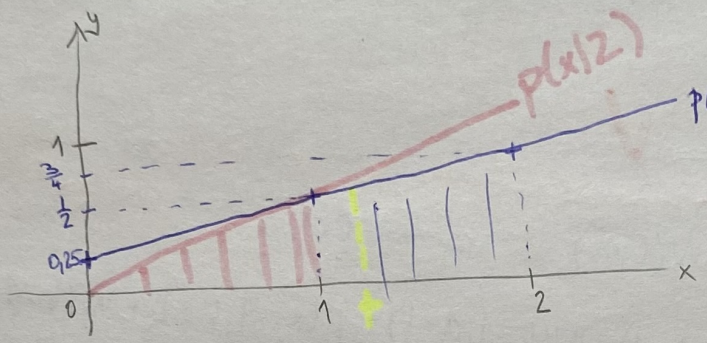
q^* ... ideální strategie

$\epsilon(k)$ ... error value pro dané k

$p(x|k)$ ... podmíněná pravděpodobnost k ✓

$x, k = ?$

b)



✓

LR??

$\int_0^t p(x|2)\,dx = \int_t^2 p(x|1)$ ← další rozhodnutí

$\int_0^t \frac{x}{2}\,dx = \int_t^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) dx$

$\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^t = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right]_t^2$

$\frac{t^2}{4} - 0 = \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{t^2}{8} - \frac{t}{4}$

$\frac{3}{8}t^2 + \frac{t}{4} - 1 = 0$

$3t^2 + 2t - 8 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \begin{cases} \frac{-2+10}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{-2-10}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$

✓

✗ neleží v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$

$q^* = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{4}{3} \rangle \\ 2 & \text{pro } x \in (\frac{4}{3}, 2\rangle \end{cases}$